



# MATEMÁTICA

Curso de pós-graduação  
“lato sensu”

# Análise Funcional

**Carlos Alberto Raposo da Cunha**  
**Fábio Alexandre de Matos**  
**Guilherme Chaud Tizziotti**  
**Waliston Rodrigues Silva**

Universidade Aberta do Brasil  
Núcleo de Educação a Distância  
Universidade Federal de São João del-Rei



Pós-graduação “lato sensu”  
Curso de Matemática

# Análise Funcional

Carlos Alberto Raposo da Cunha

Fábio Alexandre de Matos

Guilherme Chaud Tizziotti

Waliston Rodrigues Silva

UFSJ

MEC / SEED / UAB

2009

A532 Análise funcional / Carlos Alberto Raposo da Cunha; et al. –  
São João del-Rei, MG: UFSJ, 2009.  
57p.; 27cm.

Curso de Pós-graduação “lato sensu” em Matemática.

1. Análise funcional. 2. Matemática I. Matos, Fábio  
Alexandre de II. Tizziotti, Guilherme Chaud III. Silva,  
Waiston Rodrigues IV. Título

CDU: 517.98



Reitor

Helvécio Luiz Reis

Coordenador UAB/NEAD/UFSJ

Heitor Antônio Gonçalves

Coordenador do curso Práticas de Letramento e Alfabetização

Gilberto Aparecido Damiano

Conselho Editorial

Adélia Conceição Diniz

Alessandro de Oliveira

Betânia Maria Monteiro Guimarães

Frederico Ozanan Neves

Geraldo Tibúrcio de Almeida e Silva

Gilberto Aparecido Damiano (presidente)

Guilherme Chaud Tizziotti

Ignácio César de Bulhões

Maria do Carmo Santos Neta

Maria do Socorro Alencar Nunes Macedo

Maria José Netto Andrade

Marise Santana da Rocha

Rosângela Branca do Carmo

Terezinha Lombello Ferreira

Edição

Núcleo de Educação a Distância - NEAD-UFSJ

Conselho Editorial NEAD-UFSJ

Capa / Diagramação

Luciano Alexandre Pinto

Tiragem 500 exemplares

**Sumário**

**Pra começo de conversa...** ..... 05

**UNIDADE I** ..... 07

    Introdução. .... 07

    Aula 1 - Espaços Normados ..... 09

        Objetivos ..... 09

        Exercícios ..... 11

    Aula 2 - Espaços Separáveis ..... 12

        Objetivo ..... 12

        Exercícios ..... 15

    Aula 3 - Espaços de Banach ..... 16

        Objetivo ..... 16

        Exercícios ..... 18

    Aula 4 - Espaços com Produto Interno ..... 19

        Objetivo ..... 19

        Exercícios ..... 21

    Aula 5 - Espaços de Hilbert ..... 22

        Objetivo ..... 22

        Exercícios ..... 23

**UNIDADE II** ..... 25

    Introdução ..... 25

    Aula 1 - Dual de um espaço normado ..... 27

        Objetivo ..... 27

        Exercícios ..... 28

    Aula 2 - Projeções ortogonais ..... 29

        Objetivo ..... 29

        Exercícios ..... 30

    Aula 3 - Teorema de representação de Riez ..... 31

        Objetivo ..... 31

        Exercícios ..... 32

Aula 4 - Teorema de Hahn-Banach . . . . .	33
Objetivo . . . . .	33
Exercícios . . . . .	34
Aula 5 - Demonstração do Teorema de Hahn-Banach . . . . .	35
Objetivo . . . . .	35
Exercícios . . . . .	38
<b>UNIDADE III</b> . . . . .	<b>39</b>
Introdução . . . . .	39
Aula 1 - A Integral de Lebesgue . . . . .	41
Objetivo . . . . .	41
Exercícios . . . . .	44
Aula 2 - A Integral de Lebesgue abrange a de Riemann . . . . .	46
Objetivos . . . . .	46
Exercícios . . . . .	47
Aula 3 - Propriedades da Integral de Lebesgue, Conjuntos Nulos e Teoremas de Congervência . . . . .	48
Objetivos . . . . .	48
Exercícios . . . . .	49
Aula 4 - O Espaço $L^p$ . . . . .	50
Objetivos . . . . .	50
Exercícios . . . . .	53
Aula 5 - $L^p$ é Espaço de Banach . . . . .	54
Objetivos . . . . .	54
Exercícios . . . . .	56
<b>Referências</b> . . . . .	<b>57</b>

## Boas-vindas

Olá! Seja bem-vindo(a) ao **Módulo da Disciplina Análise Funcional**.

Esta disciplina (curso) será oferecida em dois meses e terá uma carga horária de 60 horas. Nela, você estudará os seguintes tópicos:

- 1) Espaços Normados
- 2) Espaços de Separáveis
- 3) Espaços de Banach
- 4) Espaços com Produto Interno

Dividimos a ementa em 3 unidades. Cada unidade é composta de 5 aulas. Desse modo, você poderá estudar uma unidade a cada vinte dias, fazendo aulas durante a semana e aproveitando os fins de semana para descanso, mais estudos de revisão e resolução de exercícios propostos.

**Atenção!** Recomendamos que você estude duas **Aulas** em, no máximo, uma semana. Faça todos os exercícios propostos e tire suas dúvidas com os tutores presenciais e a distância. Lembre-se de que o ensino a distância tem suas peculiaridades e de que você é o principal responsável pelo seu sucesso no curso. Por isso, é necessário que você tenha disciplina, dedicação e empenho. Não deixe acumular matéria. Caso isso aconteça, aproveite os fins de semana para colocar a matéria em dia e finalizar cada unidade proposta.

Nós, professores autores, bem como os tutores presenciais e os tutores a distância, estamos à sua disposição para atendê-lo(a) da melhor maneira possível.

Os autores.





## Introdução

A **UNIDADE I** está dividida em 5 aulas, da seguinte forma.

**Na primeira aula**, você verá o conceito de norma de um espaço vetorial. A seguir, com o conceito de norma em mãos, você irá ver a definição de espaço normado e alguns exemplos.

**Na segunda aula**, será introduzida a definição de espaços separáveis.

**Na terceira aula**, a definição de espaço completo será o primeiro conceito estudado. A seguir virá o importante conceito de espaço de Banach e alguns exemplos.

**Na quarta aula**, serão estudados resultados relacionados a espaços produto interno.

**Na quinta aula**, será introduzido o conceito de espaço de Hilbert e alguns exemplos.



# Aula 1 - Espaços Normados

## Objetivos

1. Verificar se uma determinada função é uma norma.
2. Identificar um espaço normado e dar exemplos dos mesmos.

Começamos observando que durante todo este curso sempre que falarmos de espaço vetorial consideraremos espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ . Feita esta observação, vejamos a Definição

**Definição 1** *Seja  $\mathbf{V}$  um espaço vetorial. Uma função  $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $x \mapsto \|x\|$ , é chamada de **norma** se satisfaz as condições seguintes.*

- 1)  $\|x\| \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbf{V}$ , e  $\|x\| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbf{V}$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , para todo  $x, y \in \mathbf{V}$ .

A condição 3) chamada de desigualdade triangular.

**Definição 2** *Um espaço vetorial  $\mathbf{V}$  munido de uma norma é chamado de **espaço normado**, que será denotado por  $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ , ou simplesmente  $\mathbf{V}$ , quando não for necessário especificar a norma.*

**Exemplo 1**  $\mathbb{R}$  com a função módulo  $|\cdot|$  é um espaço normado.

*Vejamos que a afirmação acima é verdadeira.*

*Já sabemos que  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial. Agora, basta mostrar que a função módulo  $|\cdot|$  é uma norma.*

*De fato, pois  $|x| \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , e  $|x| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Assim, a função módulo satisfaz a condição 1) da Definição 1. Não é difícil mostrar que a função módulo  $|\cdot|$  também satisfaz as condições 2) e 3) da Definição 1.*

*Portando, o espaço vetorial  $\mathbb{R}$  junto com a função módulo é um espaço normado.*

**Exemplo 2** Seja  $V = \mathbb{C}$  e considere a função  $\|\cdot\|_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\|a + bi\|_1 = |a| + |b|$ , onde  $x = a + bi \in \mathbb{C}$ . Vejamos que  $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$  é um espaço normado.

Da álgebra linear temos que  $\mathbb{C}$  é espaço vetorial. Assim, basta mostrar que  $\|\cdot\|_1$  é uma norma.

1) Dado  $x = a + bi \in \mathbb{C}$ , tem-se que  $\|x\|_1 = \|a + bi\| = |a| + |b| \geq 0$ , e  $\|x\| = \|a + bi\| = 0$  se, e somente se,  $|a| = |b| = 0$ , isto é, se, e somente se,  $x = 0$ ;

2) Sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x = a + bi \in \mathbb{C}$ . Então,  $\|\lambda x\|_1 = \|\lambda(a + bi)\| = \|\lambda a + \lambda bi\| = |\lambda a| + |\lambda b| = |\lambda||a| + |\lambda||b| = |\lambda|(|a| + |b|) = |\lambda| \|a + bi\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$ ;

3) Veja o Exercício 3 no final desta aula.

Portanto,  $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$  é um espaço normado.

**Exemplo 3** Agora, vamos considerar o espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^3$ . Vejamos que  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{max})$  é um espaço normado, onde  $\|\cdot\|_{max}$  é uma função de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$  definida, para cada  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , por  $\|x\|_{max} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$ . Vejamos que  $\|\cdot\|_{max}$  é uma norma.

De fato, dado  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  como, para cada  $i = 1, 2, 3$ ,  $|x_i| \geq 0$  e  $|x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$ , então  $\|x\|_{max} \geq 0$  e  $\|x\|_{max} = 0$  se, e somente se,  $x = (0, 0, 0)$ . Assim, a condição 1) da Definição 1 é satisfeita.

Agora, sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , logo  $\|\lambda x\|_{max} = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)\|_{max} = \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|, |\lambda x_3|\} = \max\{|\lambda||x_1|, |\lambda||x_2|, |\lambda||x_3|\} = |\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = |\lambda| \|x\|_{max}$ , satisfazendo a condição 2).

Por fim, sejam  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$  em  $\mathbb{R}^3$ . Logo,  $\|x + y\|_{max} = \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)\|_{max} = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|, |x_3 + y_3|\} \leq \max\{|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|, |x_3| + |y_3|\} \leq \|x\|_{max} + \|y\|_{max}$ , e, então, a condição 3) é satisfeita.

Dessa forma, concluímos que  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{max})$  é um espaço normado.

## Exercícios

1. Mostre que a função módulo  $|\cdot|$  em  $\mathbb{R}$  satisfaz as condições 2) e 3) da Definição 1.
2. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2$ , é uma norma?
3. Mostre que a função  $\|\cdot\|_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\|a+bi\|_1 = |a|+|b|$ , onde  $x = a+bi \in \mathbb{C}$  (dada no Exemplo 2 ), satisfaz a condição 3) da Definição 1.
4. Mostre que  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{max})$  é um espaço normado para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Aula 2 - Espaços Separáveis

### Objetivo

1. Definir espaço separável e dar exemplos dos mesmos.

Para dar a definição de espaço separável precisamos de definições preliminares que veremos a seguir. Tais definições também serão importantes para a próxima aula, em que vamos definir espaço de Banach. Observamos que algumas delas certamente você já conhece do curso de Análise Real.

**Definição 3** Dado um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , um ponto  $a \in A$  é chamado de **ponto interior** de  $A$  quando existe um intervalo aberto  $(b, c) \subset A$  tal que  $a \in (b, c)$ .

**Definição 4** Dizemos que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é um **conjunto aberto** se todos os seus pontos são interiores.

**Exemplo 4** Como exemplos de conjuntos abertos podemos citar:  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  e o intervalo aberto  $(0, 1)$ .

**Definição 5** Dizemos que um ponto  $a \in A$  é **aderente** a um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  quando  $a$  for limite de uma sequência de pontos  $a_n \in A$ .

**Exemplo 5** Considere o conjunto  $A = (0, \infty)$ . Note que  $0 \notin A$ , mas  $0$  é um ponto aderente a  $A$ , pois, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $\frac{1}{n} \in A$  e  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ .

Observe que, dado um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , todo ponto  $a \in A$  é aderente a  $A$ , pois basta tomar a sequência de pontos  $a_n = a$ .

**Definição 6** Seja  $A \subset \mathbb{R}$ . Chamaremos de **fecho** do conjunto  $A$  ao conjunto  $\bar{A}$  formado por todos os pontos aderentes a  $A$ .

**Definição 7** Dizemos que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é **fechado** se  $A = \bar{A}$ .

**Exemplo 6** Como exemplos de conjunto fechado podemos citar:  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  e o intervalo  $[0, 1]$ .

Observe que os conjuntos  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}$  são ao mesmo tempo fechados e abertos.

**Definição 8** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos reais, com  $A \subset B$ . Dizemos que  $A$  é **denso** em  $B$  quando todo ponto de  $B$  for aderente a  $A$ .

Como exemplo temos que o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é denso em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 9** Um conjunto  $A$  é dito **enumerável** se ele for finito ou se existir uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

**Exemplo 7** O conjunto  $P$  formado pelos números naturais pares é um conjunto enumerável. Basta vermos que existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow P$ , dada por  $f(n) = 2n$ .

Agora, estamos prontos para dar a definição de espaço separável, que está a seguir.

**Definição 10** Seja  $S$  um espaço vetorial normado. Diremos que  $S$  é **separável** se ele possuir um subconjunto que é enumerável e denso em  $S$ .

**Exemplo 8** Um primeiro exemplo de espaço separável é  $\mathbb{R}$ , já que o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é enumerável e denso em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 9** Considere o espaço  $l_1$  dado por

$$l_1 = \{x = (x_j) ; \forall j x_j \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_j |x_j| < \infty\}.$$

Vejamos que esse espaço é um espaço separável, ou seja, que existe um subconjunto de  $l_1$  que é enumerável e denso em  $l_1$ .

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{C} = \{x = (a_j) ; a_j \in \mathbb{R} \forall j \text{ e } a_j = 0 \text{ para todo } j \text{ maior do que algum } n\}.$$

Observamos que  $(a_j)$  representa uma sequência da forma  $(a_1, a_2, \dots)$ .

Seja  $\mathcal{D} = \{x = (a_j) \in \mathcal{C} ; \text{ cada } a_j \text{ é um número racional}\}$ . Esse conjunto está contido em  $l_1$  (veja que esta afirmação é verdadeira).

Como cada elemento de  $\mathcal{D}$  é formado por uma sequência finita de números racionais, que é um conjunto enumerável, então  $\mathcal{D}$  também é enumerável.

Agora, vejamos que  $\mathcal{D}$  é denso em  $l_1$ . Ou seja, que dado um elemento  $x \in l_1$  e dado  $\varepsilon > 0$  existe um elemento  $z \in \mathcal{D}$  tal que  $\|x - z\|_1 < \varepsilon$ .

Seja  $x = (a_j) \in l_1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon$ .

Sejam  $y = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$  e  $z = (b_1, b_2, \dots, b_n, 0, 0, \dots)$ , com  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ , tais que

$$\sum_{j=1}^n |a_j - b_j| < \varepsilon.$$

Então,  $y \in \mathcal{C}$ ,  $z \in \mathcal{D}$  e  $\|x - z\|_1 \leq \|x - y\|_1 + \|y - z\|_1 < 2\varepsilon$ , e, assim, temos que  $\mathcal{D}$  é denso em  $l_1$ .

Portanto, vimos que  $\mathcal{D}$  é um subconjunto que é enumerável e denso em  $l_1$ , e segue que  $l_1$  é separável.



## Exercícios

1. Considere o espaço  $l_2$  dado por

$$l_2 = \{x = (x_j) ; \forall j x_j \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_j |x_j|^2 < \infty\}.$$

Mostre que esse espaço é um espaço separável.

## Aula 3 - Espaços de Banach

### Objetivo

1. Definir espaço de Banach e dar exemplos dos mesmos.

Sabemos que uma sequência  $(x_n)$  converge para  $a$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Analogamente, dizemos que uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado é convergente, para um limite  $L$ , quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - L\| = 0,$$

mais precisamente, se dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N$  tal que  $\|x_n - L\| < \varepsilon$ , para todo  $n > N$ .

**Definição 11** *Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado é chamada de **sequência de Cauchy** se, dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $N$  tal que  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ , para todo  $n, m > N$ .*

**Definição 12** *Dizemos que um espaço vetorial normado  $V$  é **completo** se toda sequência de Cauchy de  $V$  converge para um elemento em  $V$ . Um espaço vetorial normado e completo é chamado de **espaço de Banach**.*

Esse nome é uma homenagem ao matemático polonês Stephan Banach (1892 - 1945), que muito contribuiu para o estudo em Análise Funcional, nas áreas de Teoria de Espaços Vetoriais Topológicos, Teoria da Medida e Integração, dentre outras.

**Exemplo 10** *No Exercício 4 da aula 1 vimos que, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{max})$  é um espaço normado. Vejamos que esse espaço é um espaço de Banach.*

*Para isso devemos mostrar que toda sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^n$  é convergente. Para esse fim, utilizaremos alguns conhecimentos de Análise Real.*

*Seja  $(x_j)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^n$ . Por um resultado de Análise Real temos que  $(x_j)$  é limitada, ou seja existe  $\alpha \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_j\|_{max} \leq \alpha$ , para todo  $j$ . Portanto, como  $(x_j)$  é limitada e estamos falando de números reais, temos que  $(x_j)$  possui uma subsequência convergente.*

Agora, por outro resultado de Análise Real, temos que toda sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente também é convergente. Logo,  $(x_j)$  é convergente e temos que  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{max})$  é um espaço de Banach.

**Exemplo 11** Considere o seguinte espaço vetorial

$$l_\infty = \{x = (x_j) ; \forall j x_j \in \mathbb{R} \text{ e } \sup_j |x_j| < \infty\}$$

com a norma  $\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|$ . Esse espaço é um espaço de Banach. (Deixamos a comprovação dessa afirmação como exercício no final da aula).

**Exemplo 12** Seja  $A$  um conjunto não vazio, e seja  $V(A)$  o espaço vetorial de todas as funções limitadas  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Não é difícil mostrar que a função  $\|f\| = \sup\{|f(x)| ; x \in A\}$  é uma norma em  $V(A)$ . Esse espaço  $V(A)$ , com essa norma, é um espaço de Banach.

De fato, seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $V(A)$ . Vejamos que  $(f_n)$  é convergente.

De fato, como  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy, então  $(f_n)$  é limitada, ou seja, existe  $\alpha \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n| \leq \alpha$ , para todo  $n$ . Como, para todo  $n$ ,  $f_n : V \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(f_n)$  é limitada, então  $(f_n)$  admite uma subsequência convergente. Agora, como  $(f_n)$  é de Cauchy e possui subsequência convergente, segue que  $(f_n)$  é convergente. Portanto,  $V(A)$  é um espaço de Banach.

## Exercícios

1. Considere o seguinte espaço vetorial

$$l_\infty = \{x = (x_j) ; \forall j \ x_j \in \mathbb{R} \text{ e } \sup_j |x_j| < \infty\}$$

com a norma  $\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|$ . Esse espaço é um espaço de Banach.

## Aula 4 - Espaços com Produto Interno

### Objetivo

1. Definir produto interno e mostrar algumas de suas propriedades.

Iniciamos esta aula introduzindo a seguinte definição.

**Definição 13** *Seja  $V$  um espaço vetorial. Uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é dito um **produto interno** se para quaisquer  $x, y, z \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , verificam-se as seguintes propriedades:*

- i)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
- ii)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
- iii)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ ;
- iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  e  $\langle x, x \rangle = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ .

**Proposição 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz):** *Seja  $V$  um espaço com produto interno. Então,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle,$$

para todo  $x, y \in V$ .

**Demonstração:**

Se  $x = 0$  ou  $y = 0$ , basta usar os itens iii) e iv) da Definição 13 para verificar que a desigualdade é válida.

Agora, se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , então para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos que

$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Isto é, o polinômio de grau dois em  $\lambda$ , dado por  $\lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$ . Portanto, o discriminante desse polinômio não pode ser positivo. Logo,  $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ , e, assim, segue que  $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$ , ou seja,  $|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ . c.q.d.

**Corolário 0.1** *Seja  $V$  um espaço com produto interno. Então a função  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

*é uma norma (induzida pelo produto interno) em  $V$ .*

**Demonstração:**

Sugerimos que você reveja a Definição 1 dada na Aula 1.

Observe que as condições i) e ii) da definição de norma são plenamente satisfeitas pela função  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Agora, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, vejamos que essa função é de fato uma norma, ou seja, que também satisfaz a condição iii).

Da maneira que a função foi definida temos que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Agora, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2.$$

E daí, temos que  $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ , completando a demonstração de que a função  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  é uma norma. c.q.d.

**Definição 14** *Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que  $x, y \in V$  são **ortogonais**, e escrevemos  $x \perp y$ , se  $\langle x, y \rangle = 0$ .*

**Proposição 2 (Lei do Paralelogramo):** *Sejam  $V$  um espaço com produto interno e  $x, y \in V$ . Então,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

*onde a norma é a induzida pelo produto interno dada no Corolário 0.1.*

**Demonstração:** Faça o Exercício 3) a seguir.

## Exercícios

1. Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $x, y, z \in V$ . Utilizando as propriedades i), ii) e iii) da Definição 13, mostre que  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ .

2. Utilize a Proposição 1, o Corolário 0.1 e a Definição 14 para mostrar o seguinte resultado:

**Teorema de Pitágoras:** Seja  $V$  um espaço com produto interno, e sejam  $x, y \in V$  com  $x \perp y$ . Então  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

3. Utilize a Definição 13 e o Corolário 0.1 para demonstrar a Lei do Paralelogramo dada na Proposição 2.

## Aula 5 - Espaços de Hilbert

### Objetivo

1. Definir um espaço de Hilbert e dar exemplos.

**Definição 15** *Seja  $V$  um espaço vetorial. Dizemos que  $V$  é um **espaço de Hilbert**, se  $V$  for completo na norma induzida pelo produto interno.*

Observe que se  $V$  é um espaço de Hilbert, então ele também é um espaço de Banach. Assim, uma outra forma de definir um espaço de Hilbert é a seguinte: um espaço de Hilbert é um espaço de Banach cuja norma é a induzida pelo produto interno.

**Exemplo 13** *Um primeiro exemplo de um espaço de Hilbert é  $\mathbb{R}^2$  com o produto interno*

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2,$$

onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  são elementos quaisquer em  $\mathbb{R}^2$ .

Generalizando, para  $n \in \mathbb{N}$ , temos que o espaço  $\mathbb{R}^n$  com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  são elementos quaisquer em  $\mathbb{R}^n$ , é um espaço de Hilbert.

Para vermos que  $\mathbb{R}^2$  com o produto interno dado acima é realmente um espaço de Hilbert temos primeiramente que verificar que podemos ter uma norma induzida pelo produto interno dado. Essa verificação será deixada como exercício.

Sabendo da existência da norma induzida pelo produto interno dado, vejamos que  $\mathbb{R}^2$  é completo nessa norma, ou seja, que toda sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^2$  é convergente.

De fato, seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^2$ . Logo,  $(x_n)$  é limitada, ou seja, existe  $\alpha \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n\| \leq \alpha$  para todo  $n$ . Assim, como  $(x_n)$  é limitada, segue que  $(x_n)$  possui



uma subsequência convergente. Portanto, temos que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente, então  $(x_n)$  é convergente.

Analogamente se mostra que, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de Hilbert com o produto interno dado anteriormente.

**Exemplo 14** Considere o espaço  $l_2$  formado por todas as sequências  $x = (x_n)$  de elementos em  $\mathbb{R}$  tais que  $\sum_n x_n^2 < \infty$ , isto é,

$$l_2 = \{x = (x_n) ; \forall n x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_n x_n^2 < \infty\}.$$

O espaço  $l_2$  é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para  $x, y \in l_2$ .

**Exemplo 15** Considere o espaço  $L_2$  formado por todas as funções reais mensuráveis definidas em  $[0, 1]$  tais que  $\int_0^1 |f|^2 < \infty$ . O espaço  $L_2$  com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

é um espaço de Hilbert.

## Exercícios

1. Verifique se o produto interno dado no Exemplo 14 é de fato produto interno, ou seja, satisfaz as 4 condições da Definição 13.
2. Verifique se o produto interno dado no Exemplo 15 é de fato produto interno, ou seja, satisfaz as 4 condições da Definição 13.



## Introdução

A **UNIDADE II** está dividida em 5 aulas, da seguinte forma.

**Na primeira aula**, você verá a definição do dual de um espaço normado e a demonstração de que esse novo espaço é um espaço completo.

**Na segunda aula**, você verá a definição de projeção ortogonal e exemplos.

**Na terceira aula**, será apresentado o Teorema de Representação de Riez para funcionais lineares em espaços de Hilbert.

**Na quarta aula**, você verá a definição de funcional sublinear e o Teorema de Hahn-Banach.

**Na quinta aula**, você verá a demonstração do Teorema de Hahn-Banach.



# Aula 1 - Dual de um espaço normado

## Objetivo

1. Apresentar o dual de um espaço normado e algumas de suas propriedades.

Começaremos esta aula apresentando as definições de funcional linear e de espaço dual de um espaço vetorial  $V$ .

**Definição 16** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um **funcional linear** é uma transformação linear de  $V$  em  $\mathbb{R}$ , isto é, uma transformação  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . O conjunto de todos os funcionais lineares de  $V$  em  $\mathbb{R}$  é chamado de **espaço dual** de  $V$ .*

**Notação:** O dual do espaço vetorial  $V$  é usualmente denotado por  $V^*$ .

**Definição 17** *Seja  $V$  um espaço vetorial normado. Para um funcional linear  $f \in V^*$ , definimos a **norma** de  $f \in V^*$  por*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$

**Observação:** Será deixado para você mostrar que  $V^*$  com a norma definida acima é de fato um espaço vetorial normado - **Exercício 1**.

Mostraremos, no seguinte teorema, que se  $V$  é normado então  $V^*$  é um espaço completo, isto é,  $V^*$  é um espaço de Banach.

**Teorema 1** *Se  $V$  é um espaço vetorial normado, então o seu espaço dual,  $V^*$  é um espaço de Banach.*

### Demonstração:

Para mostrar que  $V^*$  é um espaço de Banach, devemos mostrar que  $V^*$  é um espaço vetorial completo. Assumiremos que  $V^*$  é um espaço normado, onde a norma é dada pela **Definição 17** acima. Para mostrar que  $V^*$  é um espaço completo, devemos mostrar que toda sequência de Cauchy em  $V^*$  é convergente e seu limite é um elemento de  $V^*$ .

Considere então  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $V^*$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon,$$

para todos  $m, n > n_0$ .

Para  $x \in V$ , considere a sequência  $(f_n(x))$  de elementos de  $\mathbb{R}$ . Temos que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|(f_n - f_m)(x)\| \leq \|f_n - f_m\| \|x\|,$$

o que mostra que  $(f_n(x))$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ , que é um espaço completo. Logo, existe a sequência converge, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existe em  $\mathbb{R}$ .

Defina então a seguinte função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , para todo  $x \in V$ . Mostraremos agora que a função  $f$  é o limite da sequência de Cauchy  $(f_n)$  em  $V^*$ . Para tanto, devemos mostrar que  $f$  é linear, limitado e que  $f_n \rightarrow f$  para todo  $x \in V$ .

Que  $f$  é linear, segue diretamente das propriedades de limites de funções reais.

Vamos mostrar que  $f$  é limitado. Note que a sequência  $(f_n(x))$  é de Cauchy, e portanto limitada, isto é, existe  $M$  tal que  $\|f_n\| \leq M$ , para todo  $n$ . Logo,

$$\|f_n(x)\| \leq \|f_n\| \|x\| \leq M \|x\|,$$

e tomando o  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ , segue que

$$\|f_n\| \leq M \|x\|.$$

Falta mostrar que  $(f_n) \rightarrow f$ , ou equivalentemente, devemos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| \rightarrow 0$ .

Dado  $\epsilon > 0$  e escolhido  $n_0$  convenientemente, temos que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon \|x\|,$$

para todos  $m, n \geq n_0$ .

Passando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que

$$\|f(x) - f_m(x)\| \leq \|x\|.$$

E, portanto

$$\|f - f_m\| \leq \epsilon,$$

para todo  $m \geq n_0$ .

c.q.d.

## Exercício

1. Mostre que  $V^*$  é um espaço vetorial normado.

## Aula 2 - Projeções Ortogonais

### Objetivo

1. Apresentar as projeções ortogonais.

Começaremos a aula apresentando a definição de subespaço ortogonal de um espaço com produto interno. Para relembrar a definição de espaço com produto interno, veja a **Definição 13** na página 15.

**Definição 18** *Sejam  $V$  um espaço vetorial com produto interno e  $W$  um subespaço de  $V$ . O **subespaço ortogonal** de  $W$  em  $V$ , denotado por  $W^\perp$ , é o conjunto  $\{x \in V; \langle x, y \rangle = 0\}$  para todo  $y \in W$ .*

**Exemplo 16** *Considere  $V = \mathbb{R}^2$  espaço vetorial com base  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  munido do seguinte produto interno:*

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd,$$

*para todos  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ . Seja  $W$  o subespaço de  $V$  gerado pelo vetor  $(1, 0)$ , isto é,  $W = \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\}$ . Então  $W^\perp$  é o espaço vetorial formado pelos vetores  $(c, d)$  tais que  $\langle (a, 0), (c, d) \rangle = ac = 0$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Segue daí que  $W^\perp = \{(c, d); c = 0 \text{ e } d \in \mathbb{R}\}$  isto é,  $W^\perp$  é o subespaço gerado pelo vetor  $(0, 1)$ .*

**Definição 19** *Sejam  $V$  um espaço vetorial com produto interno e  $W$  um subespaço de  $V$ . Uma transformação linear  $P : V \rightarrow W$  é chamada de **projeção** se  $P^2 = P \circ P = P$ . Ainda, uma projeção é chamada de **projeção ortogonal** se  $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$ .*

**Exemplo 17** *Seja  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $P(x, y) = (x, 0)$ . Então  $P$  é uma projeção ortogonal.*

*Para mostrar que  $P$  é projeção ortogonal, devemos mostrar que  $P$  é uma projeção, isto é, uma transformação linear que satisfaz  $P \circ P = P$ , e  $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$ .*

Primeiro vamos mostrar que  $P$  é projeção. Para tanto sejam  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então

$$P((a, b) + \alpha(c, d)) = P(a + \alpha c, b + \alpha d) = (a + \alpha c, 0) = (a, 0) + \alpha(c, 0) = P(a, b) + \alpha P(c, d)$$

pela definição de  $P$ . Logo  $P$  é uma transformação linear. Além disso,  $P$  é uma projeção, pois

$$P(P(a, b)) = P(a, 0) = (a, 0) = P(a, b).$$

Falta mostrar que  $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$ . Note que  $\text{Im}(P) = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$  e  $\text{Ker}(P) = \{(x, y); x = 0\} = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ .

Portanto,  $\text{Ker}(P)^\perp = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; \langle (x, z), (0, y) \rangle = 0, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}\} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; zy = 0, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}\} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; z = 0\} = \text{Im}(P)$

Completamos assim a demonstração de que  $P$  é uma projeção ortogonal.

**Definição 20** Uma projeção ortogonal  $P$  é **contínua** se, e somente se,  $\text{Im}(P)$  for um subespaço fechado.

**Teorema 2** Sejam  $V$  um espaço de Hilbert e  $W$  um subespaço fechado de  $V$ , então  $V = W \oplus W^\perp$ , isto é, cada  $v \in V$  pode ser escrito de maneira única como  $v = w + u$ , onde  $w \in W$  e  $u \in W^\perp$ . Os vetores  $w$  e  $u$  são os únicos elementos de  $W$  e  $W^\perp$  cuja distância a  $v$  é mínima, isto é,  $w = P_W(v)$  e  $u = P_{W^\perp}(v)$ . Além disso,  $P_W$  e  $P_{W^\perp} = I - P_W$  são projeções contínuas com  $\|P_W\| = \|P_{W^\perp}\|$ .

## Exercícios

1. Considere  $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $P(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$ . Mostre que  $P$  é projeção ortogonal.
2. Considere  $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $P(x, y, z) = \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}(x, y, z)$ . Mostre que  $P$  é projeção ortogonal.



## Aula 3 - Teorema de Representação de Riez

### Objetivo

1. Apresentar e demonstrar o Teorema de representação de Riez.

Nesta aula, vamos apresentar o Teorema de Representação de Riez que dá uma caracterização dos funcionais lineares sobre um espaço de Hilbert. Para lembrar a definição de funcional linear veja a **Definição 16** na página 21, e de espaço de Hilbert veja **Definição 15** na página 18.

Sejam  $V$  um espaço vetorial real com produto interno. Para cada  $y \in V$  podemos definir uma função

$$f_y : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por  $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ ,  $x \in V$ . Segue das propriedades de produto interno que  $f$  é um funcional linear.

Para um espaço de Hilbert  $H$  e  $h \in H$ , o funcional  $f_h$  definido como acima será contínuo e  $\|f_h\|_{H^*} = \|h\|_H$ , onde  $H^*$  é o espaço dual de  $H$ . (Veja **Exercício 1**).

Desta maneira, a transformação

$$\varphi : H \longrightarrow H^*,$$

dada por  $\varphi(y) = f_y$  é uma isometria entre  $H$  e  $Im(\varphi)$ , isto é,  $\varphi$  é uma transformação linear onde  $\|\varphi(h)\|_{H^*} = \|h\|_H$ .

Apresentaremos a seguir o teorema de representação de Riez, que mostra que  $\varphi$  é uma transformação sobrejetiva, isto é,  $Im(\varphi) = H^*$ .

**Teorema 3 (Teorema de Representação de Riez)** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $f \in H^*$ . Então existe um único  $y \in H$  tal que  $f(x) = \langle x, y \rangle$  para todo  $x \in H$ .*

#### Demonstração:

Primeiramente, vamos mostrar que se existem  $y, z \in H$  tais que  $f_y = f_z$ , então  $y = z$ . Suponha então  $f_y = f_z$ , para  $y, z \in H$ , então  $\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle$ , isto é,  $\langle x, y - z \rangle = 0$  para todo  $x \in V$ . Logo,  $y - z = 0$  o que acarreta  $y = z$ .

Vamos agora mostrar que para todo funcional linear  $f$  existe  $y \in H$  tal que  $f = f_y$ , isto é,  $\varphi(y) = f$  o que mostrará a sobrejetividade da função  $\varphi$ . Vamos separar em dois casos:

**Caso 1:**  $f$  é o funcional nulo.

Neste caso basta tomar  $y = 0$  e assim  $f_y(x) = \langle x, y \rangle = 0$  para todo  $x \in H$ .

**Caso 2:**  $f$  é um funcional não nulo.

Considere  $W = \{x \in H; f(x) = 0\}$ . Então  $W \subsetneq H$  e portanto o espaço  $W^\perp$  é não nulo. Tome  $z \in W^\perp$  com  $\|z\| = 1$  e considere  $u = f(x)z - f(z)x$ . Note que  $u \in W$ , pois  $f(u) = f(f(x)z - f(z)x) = f(x)f(z) - f(z)f(x)$ .

Daí, temos que

$$0 = \langle u, z \rangle = f(x)\|z\|^2 - f(z)\langle x, z \rangle = f(x) - \langle x, f(z)z \rangle.$$

Portanto, tomando  $y = f(z)z$ , temos que  $f(x) = \langle x, y \rangle$ , onde  $y = f(z)z$ . c.q.d.

## Exercícios

1. Mostre que o funcional linear  $f_y$  é contínuo e  $\|f\|_H^* = \|y\|_H$ .

## Aula 4 - Teorema de Hahn-Banach

### Objetivo

1. Enunciar o Teorema de Hahn-Banach e apresentar uma aplicação

**Definição 21** Diz-se que uma função  $p : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um espaço vetorial  $\mathbf{V}$  é um **funcional sublinear** se para todo  $x, y \in \mathbf{V}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $\alpha \geq 0$ , se são satisfeitas as seguintes condições:

$$(i) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y);$$

$$(ii) \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Um exemplo de funcional sublinear é a função norma. Pedimos nos exercícios desta aula que o leitor mostre esse fato.

**Definição 22** Diz-se que um funcional linear  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  é **dominado** por um funcional sublinear  $p : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f(x) \leq p(x)$  para todo ponto  $x$  de  $\mathbf{V}$ .

Apresentaremos a seguir o Teorema de Hahn-Banach e algumas das suas aplicações. A demonstração do Teorema será apresentada na próxima aula.

**Teorema 4 (Teorema de Hahn-Banach)** *Sejam  $\mathbf{V}$  um espaço vetorial,  $p : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional sublinear e  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear definido em um subespaço vetorial  $\mathbf{N}$  de  $\mathbf{V}$ .*

*Se  $f$  é dominado por  $p$  então  $f$  possui extensão linear  $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  para  $\mathbf{V}$  dominada por  $p$ .*

**Definição 23** Diz-se que o dual  $\mathbf{V}^*$  de um espaço vetorial normado  $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$  **separa pontos** de  $\mathbf{V}$  se para todo par de pontos  $x \neq y$  em  $\mathbf{V}$ , existe um funcional  $f \in \mathbf{V}^*$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ .

Agora, enunciaremos algumas aplicações do Teorema de Hahn-Banach.

**Corolário 4.1** *Seja  $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$  espaço vetorial normado, não trivial. Então:*

- (a) *Para todo elemento não nulo  $x$  de  $\mathbf{V}$ , existe um funcional  $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \|x\|$  e  $\|F\| = 1$ .*
- (b)  *$\mathbf{V}^*$  separa pontos de  $\mathbf{V}$ .*

**Demonstração:**

(a) Considere o funcional sublinear  $p : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $p(x) := \|x\|$  e o subespaço  $\mathbf{N}$  de  $\mathbf{V}$  gerado pelo vetor  $x$ , i.e.,  $\mathbf{N} := \{sx; s \in \mathbb{R}\}$ .

Além disso, tome o funcional linear  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $f(sx) = s\|x\|$  para  $s \in \mathbb{R}$ .

Observe que  $f$  é dominado por  $p$ . Portanto, podemos aplicar o teorema de Hahn-Banach, o que nos leva a concluir que existe uma extensão  $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  dominada por  $p = \|\cdot\|$ . Portanto, temos o seguinte:

- (i)  $F(x) = f(x) = \|x\|$ , já que  $x \in \mathbf{N}$ .
- (ii)  $\|F\| \leq \|p\|$ .

Como  $F(x) = p(x)$ , então  $\|F\| = \|p\|$ , e portanto,  $\|F\| = 1$ , pois  $\|p\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$ .

(b) Como,  $x \neq y$ , então  $x - y \neq 0$ , logo, pelo item (a), existe um funcional linear  $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz  $F(x - y) = \|x - y\|$  e  $\|F\| = 1$ .

Como  $F$  é linear, temos que  $F(x) - F(y) = F(x - y) = \|x - y\| \neq 0$ , logo  $F(x) \neq F(y)$ , i.e.,  $\mathbf{V}^*$  separa pontos de  $\mathbf{V}$ . c.q.d

## Exercícios

1. Prove que a norma é um funcional sublinear.

- (i)  $f_M(v) = f(v)$ , para todo  $v \in \mathbf{N}$ .
- (ii)  $f_M(v) \leq p(v)$ , para todo  $v \in \mathbf{V}$ .

# Aula 5 - Demonstração do Teorema de Hahn-Banach

## Objetivo

1. Apresentar o Lema de Zorn e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach

Nesta aula apresentaremos a demonstração do Teorema de Hahn-Banach, que foi apresentado a você na aula anterior.

Começaremos a aula apresentando algumas definições.

**Definição 24** Um conjunto  $X$ , não vazio, é **parcialmente ordenado** se  $X$  possui uma relação, que denotaremos por  $\ll$  satisfazendo as propriedades:

(i)  $x \ll x$  para todo  $x \in X$

(ii) Se  $x \ll y$  e  $y \ll z$  então  $x \ll z$

Se, além das propriedades acima  $X$  também satisfizer

(iii) Para todos  $x \in X$  e  $y \in X$ , vale  $x \ll y$  ou  $y \ll x$ .

Então,  $X$  é um conjunto **totalmente ordenado**.

**Definição 25** Sejam  $X$  um conjunto parcialmente ordenado e  $Y$  um subconjunto de  $X$  totalmente ordenado. Dizemos que  $x \in X$  é uma **cota superior**  $Y$  se  $y \ll x$  para todo  $y \in Y$ . Ainda, dizemos que o conjunto  $X$  possui **elemento maximal** se existe  $z \in X$  tal que  $x \ll z$  para todo  $x \in X$ .

Enunciaremos agora o Lema de Zorn, que é uma versão do Axioma da Escolha:

**Lema 1 (Lema de Zorn)** Se  $X$  é um conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado  $Y$  de  $X$  possui cota superior, então  $X$  possui um elemento maximal.

De posse do Lema de Zorn, vamos agora demonstrar o Teorema de Hahn-Banach que enunciaremos novamente a seguir.

**Teorema 5 (Teorema de Hanh-Banach)** *Sejam  $\mathbf{V}$  um espaço vetorial,  $p : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional sublinear e  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear definido em um subespaço vetorial  $\mathbf{N}$  de  $\mathbf{V}$ .*

*Se  $f$  é dominado por  $p$  então  $f$  possui extensão linear  $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  para  $\mathbf{V}$  dominada por  $p$ .*

**Demonstração:** Na demonstração desse resultado usaremos o Lema de Zorn apresentado anteriormente.

Considere o conjunto de todos os funcionais lineares  $f_\alpha$  definidos em subespaços vetoriais  $\mathbf{V}_\alpha$  de  $\mathbf{V}$  tais que  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}_\alpha$ . Além disso, suponha que  $f_\alpha$  restrito a  $\mathbf{N}$  coincida com  $f$ , isto é,  $f_\alpha(v) = f(v)$  para todo  $v \in \mathbf{N}$  e consequentemente  $f_\alpha(v) \leq p(v)$  para todo  $v \in \mathbf{V}_\alpha$ .

Denotaremos por  $X$  o conjunto de todos os funcionais lineares com a propriedade acima. Assumindo que para  $\alpha \neq \beta$ ,  $\mathbf{V}_\alpha \neq \mathbf{V}_\beta$ , escreveremos  $X = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f_\alpha$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto de índices utilizado para facilitar a demonstração. Agora, defina a seguinte relação nesse conjunto:

Defina sobre a seguinte relação:

$$f_\alpha \ll f_\beta,$$

se  $\mathbf{V}_\alpha \subsetneq \mathbf{V}_\beta$  e  $f_\alpha(v) = f_\beta(v)$  para todo  $v \in \mathbf{V}_\alpha$ .

Deixaremos, como exercício, a demonstração de que  $X$  é um conjunto parcialmente ordenado com a relação  $\ll$ .

Considere agora um subconjunto  $Y$  de  $X$  totalmente ordenado e defina  $\mathbf{V}_Y = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_Y} \mathbf{V}_\alpha$ , onde  $\Gamma_Y \in \Gamma$ , e  $f_Y(v) = f_\alpha(v)$ , se  $v \in \mathbf{V}_\alpha$ . Fica como exercício que  $f_Y$  está bem definida, que é um funcional linear e que  $f_Y$  é uma cota superior para  $Y$ .

Usando o Lema de Zorn, o conjunto  $X$  possui um elemento maximal que denotaremos por  $f_M$  com domínio  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}_M \subset \mathbf{V}$ . Pela definição do conjunto  $X$  temos que:

- (i)  $f_M(v) = f(v)$ , para todo  $v \in \mathbf{N}$ .
- (ii)  $f_M(v) \leq p(v)$ , para todo  $v \in \mathbf{V}$ .

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que  $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}$ .

Suponha por um momento, que  $\mathbf{V}_M \subsetneq \mathbf{V}$ . Desta maneira existe  $z \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}_M$  e denotaremos por  $\mathbf{V}_*$  o subespaço vetorial de  $\mathbf{V}$  gerado por  $\mathbf{V}_M$  e  $z$ . Note que cada elemento

de  $V_*$  pode ser escrito da forma  $v = v_M + \mathbf{x}zx$ , onde  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$  e  $v_M \in \mathbf{V}_M$ .

Defina o seguinte funcional linear  $f_* : \mathbf{V}_* \rightarrow \mathbf{R}$  dado por  $f_*(v) = f_M(v_M) + \mathbf{x}s$ , onde  $s$  será definido em seguida.

Com essa definição  $f_*(v) = f_M(v)$  para todo  $v \in \mathbf{V}_M$  e para mostrar que  $f_* \in X$  definiremos  $s$  de modo que a condição  $f_*(v) \leq p(v)$  para todo  $v \in \mathbf{V}_*$  seja verdadeira.

Queremos que  $f_*(v) \leq p(v)$  para todo  $v \in \mathbf{V}_*$ , ou seja, que

$$f_M(v_M) + xs \leq p(v_M + xz) = xp\left(\frac{v_M}{x} + z\right)$$

equivalentemente, queremos que

$$s \leq p\left(\frac{v_M}{x} + z\right) - f_M\left(\frac{v_M}{x}\right),$$

se  $x > 0$  e

$$s \leq p\left(\frac{v_M}{x} + z\right) + f_M\left(\frac{v_M}{x}\right),$$

se  $x < 0$ .

O que é equivalente a pedir que:

$$s \leq p\left(\frac{v_M}{x} + z\right) - f_M\left(\frac{v_M}{x}\right),$$

se  $x > 0$  e

$$s \geq -p\left(-\frac{v_M}{x} - z\right) - f_M\left(\frac{v_M}{x}\right),$$

se  $x < 0$ .

Portanto, queremos que exista  $s$  tal que

$$-p\left(-\frac{v_M}{x} - z\right) - f_M\left(\frac{v_M}{x}\right) \leq s \leq p\left(\frac{v_M}{x} + z\right) - f_M\left(\frac{v_M}{x}\right)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e para todo  $v_M \in \mathbf{V}_M$ .

Note que tal número  $s$  existe, pois

$$\begin{aligned} f_M(v_M) - f_M(v'_M) &= f_M(v_M - v'_M) \leq p(v_M - v'_M) \\ &= p((v_M + z) + (-z - v'_M)) \\ &\leq p(v_M + z) + p(-z - v'_M), \end{aligned}$$

para todos  $v_M \in \mathbf{V}_M$  e  $v'_M \in \mathbf{V}_M$ . Então

$$-p(-z - v'_M) - f_M(v'_M) \leq p(v_M + z) - f_M(v_M),$$

para todos  $v_M \in \mathbf{V}_M$  e  $v'_M \in \mathbf{V}_M$ .

Desta maneira, supondo que  $V_M \subsetneq V$ , construímos um subespaço  $V_*$  e um funcional  $f_*$  tais que:

(i)  $V_M \subseteq V_*$

(ii)  $f_* \in X$ .

As propriedades citadas contradizem o fato de  $f_M$  ser um elemento maximal de  $X$ .

Logo é uma contradição supor que  $V_M \subsetneq V$  e, portanto, temos que  $V_M = V$  o que completa a demonstração. c.q.d.

## Exercícios

1. Demonstre que o conjunto  $X$  que aparece na demonstração do Teorema de Hahn-Banach é um conjunto parcialmente ordenado.
2. Demonstre que a função  $f_Y$  que aparece na demonstração do Teorema de Hahn-Banach está bem definida, que  $f_Y$  é um funcional linear e que é uma cota superior para  $Y$ .
3. Demonstre os seguintes fatos utilizados na demonstração do Teorema de Hahn-Banach:

(i)  $f_M(v) = f(v)$ , para todo  $v \in \mathbf{N}$ .

(ii)  $f_M(v) \leq p(v)$ , para todo  $v \in \mathbf{V}$ .



## Introdução

A **UNIDADE III** está dividida em 5 aulas, da seguinte forma.

**Na primeira aula**, você verá a definição da integral de Lebesgue.

**Na segunda aula**, você verá que a integral de Lebesgue sobrepõe-se à integral de Riemann.

**Na terceira aula**, você verá algumas propriedades da integral de Lebesgue e o Teorema da Convergência.

**Na quarta aula**, você verá a definição do espaço  $L^p$  e as desigualdades de Hölder e Minkowski.

**Na quinta aula**, você verá que os espaços  $L^p$  são espaços de Banach.



# Aula 1 - A Integral de Lebesgue

## Objetivo

1. Apresentar a Integral de Lebesgue

Considere o espaço vetorial  $C([a, b])$ , o espaço vetorial das funções contínuas

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

munido da norma  $\|f\|_c := \int_a^b |f(x)| dx$ . Deixaremos como exercício a demonstração de que esse é um espaço vetorial normado com essa mesma norma.

Sempre que nos deparamos com um espaço vetorial normado, uma pergunta que surge naturalmente é se esse espaço normado é completo. Veremos no próximo exemplo que o espaço das funções contínuas sobre um intervalo fechado não é completo. Para tanto, vamos exibir uma sequência de Cauchy que não converge para um elemento de  $C([a, b])$ .

**Exemplo 18** Considere a sequência de funções  $(f_n)$  do espaço  $C([-1, 1])$ , onde para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  é definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2^n x, & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{2^n} \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2^n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $C([-1, 1])$  com a norma  $\|\cdot\|_c$  e que se seu limite existir e estiver em  $C([-1, 1])$  esse teria que satisfazer

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Mas  $f(x)$  definida acima não é uma função contínua, isto é,  $f \notin C([-1, 1])$ . Concluimos assim que  $C([-1, 1])$  não é um espaço completo.

Dedicaremos-nos em seguida a estender o espaço  $C([-1, 1])$  a um espaço completo. O primeiro espaço que poderíamos tentar seria o espaço das funções Riemann Integráveis,

mas esse espaço também não é completo como gostaríamos. Para resolver o problema, vamos introduzir uma outra noção de integração, a Integral de Lebesgue.

Começaremos com uma definição que será de grande utilidade.

**Definição 26** Um subconjunto de  $\mathbb{R}$  é chamado de **conjunto simples** se puder ser expresso como união finita de intervalos disjuntos.

**Exemplo 19**

1. Todo intervalo fechado da reta é um conjunto simples.
2. O conjunto  $[-1, 1] \cup [2, 3]$  é um conjunto simples.
3. O conjunto  $[-1, 1] \cup [1, 3]$  não é simples, pois os intervalos  $[-1, 1]$  e  $[1, 3]$  não são disjuntos.

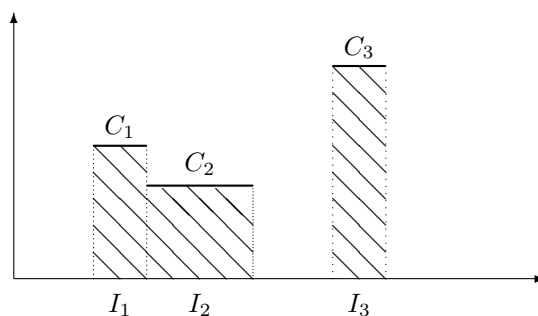
Definiremos a seguir a noção de medida de um conjunto simples da reta.

**Definição 27** A **medida de um intervalo**  $I := [a, b]$  é definida como  $\mu(I) = b - a$ . Para um conjunto simples  $A := \bigcup_{i=1}^n I_i$  definimos a medida de  $A$  por  $\mu(A) := \sum_{i=1}^n \mu(I_i)$ .

**Definição 28**  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser uma **função escada** se existe uma coleção finita de intervalos disjuntos  $\{I_1, \dots, I_n\}$  satisfazendo  $I_i \subset I$  e um conjunto  $\{c_1, \dots, c_n\}$  de números reais tais que

$$S(x) = \begin{cases} c_i, & \text{se } x \in I_i, i \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{se } x \in I \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right). \end{cases}$$

Veja um exemplo na seguinte ilustração:



Partiremos agora para a definição da integral de Lebesgue para uma função real  $f$  não negativa, isto é,  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  pertencente ao domínio de  $f$ .

**Definição 29** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não negativa. Uma sequência de funções escadas  $\{S_i : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^{\infty}$  é chamada de admissível para  $f$  se são satisfeitas as seguintes condições:*

- (a)  $S_i(x) \geq 0$  para todos  $x \in I$  e  $i \geq 1$ .
- (b)  $0 \leq f(x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} S_i(x)$  para todo ponto  $x$  de  $I$ .

**Observação 1** *Para toda função não negativa  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , existe sequência admissível  $\{S_i : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^{\infty}$  para  $f$ . De fato, basta tomar  $S_i(x) := 1$  para todo  $x \in I$  e  $i \geq 0$ .*

Definiremos a seguir a integral de Lebesgue, mencionada no início da aula. Começaremos definindo a integral de Lebesgue para funções escadas.

**Definição 30** *Seja  $S$  uma função escada. Usando a notação da **Definição 28**, definiremos a **integral de Lebesgue** de  $S$  por  $\int_I S := \sum_{i=1}^n \mu_{I_i} c_i$ .*

Considere agora uma função não negativa  $f$ . Associaremos a  $f$  o seguinte número real estendido, isto é, um número do conjunto  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ :

$$L(f) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \int_I S_i \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências  $\{S_i : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^{\infty}$  admissíveis para  $f$ .

**Observação 2**  *$L(f)$  existe e é não negativo pois já vimos que existe sequência admissível para qualquer função não negativa e que o  $\sum_{i=1}^{\infty} \int_I S_i$  tem zero como cota inferior.*

**Definição 31** *Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  não negativa é Lebesgue integrável se existe uma sequência de funções escadas,  $S_m$ , tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} L(|f - S_m|) = 0$ .*

*Nesse caso, dizemos que a integral de Lebesgue de  $f$  é  $\int_I f := L(f)$ .*

Observe que, usando essa definição, a função escada é integrável e sua integral de Lebesgue é a mesma definição de integral de Lebesgue usada anteriormente para esse caso particular.

Definimos acima a integral de Lebesgue para uma função não negativa. Precisamos de uma definição mais geral, para tanto, vamos definir as partes negativas e positivas de uma função real.

**Definição 32** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer.*

*A parte positiva de  $f$  é a função:*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

*Analogamente, a parte negativa de  $f$  é a função:*

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

Observe que  $-f_-$  é uma função não negativa. Desta maneira podemos escrever toda função real  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  como a diferença de duas funções não negativas, a saber:

$$f = f_+ + f_- = f_+ - (-f_-).$$

**Definição 33** *Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é **Lebesgue integrável** se as funções não negativas  $f_+$  e  $-f_-$  são Lebesgue integráveis. Nesse caso, definimos a integral de Lebesgue de  $f$  por  $\int_I f := \int_I f_+ - \int_I (-f_-)$ .*

## Exercícios

1. Considere o espaço vetorial  $C([a, b])$  das funções reais  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, munido da norma  $\|f\|_c := \int_a^b |f(x)| dx$ . Mostre que  $C([a, b])$  é um espaço vetorial normado com essa mesma norma.

Prove que a sequência de funções  $(f_n)$  em  $C[-1, 1]$ , onde  $f_n$  é definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2^n x, & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{2^n} \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2^n} < x \leq 1. \end{cases}$$

para todo  $n$ , é uma sequência de Cauchy.

2. Prove que a função  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

é limite, na norma  $\|\cdot\|_c$ , da sequência dada no exercício anterior.

## Aula 2 - A Integral de Lebesgue abrange a de Riemann

### Objetivos

1. Provar que toda função Riemann Integrável é Lebesgue Integrável.
2. Exibir um exemplo de uma função Lebesgue Integrável que não é Riemann Integrável.

Nesta aula, nos dedicaremos a mostrar que toda função real que seja Riemann integrável também é Lebesgue integrável. Ainda, apresentaremos um exemplo de função Lebesgue integrável que não é Riemann integrável.

Começaremos com a primeira afirmação no próximo resultado.

**Teorema 5** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Riemann integrável com integral de Riemann denotada por  $\int_a^b f(x)dx$ . Então  $f$  é Lebesgue integrável e sua integral de Lebesgue é a sua própria integral de Riemann, i.e.,  $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$ .*

**Demonstração:** Seja  $P_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ , onde  $x_0 := a$ ,  $x_n := b$  e  $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{2^{n-1}}$  uma sequência de partições em  $[a, b]$ .

Sejam  $F_m(x) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x)$ , onde  $M_k := \sup(\{f(x); x \in [x_i, x_{i+1}]\})$  e  $f_m(x) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x)$ , onde  $m_k := \inf(\{f(x); x \in [x_i, x_{i+1}]\})$ .

Agora, como  $f$  é Riemann integrável, então as suas integrais superior e inferior são, respectivamente,

$$\bar{\int}_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} F_m$$

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} F_m$$

Portanto, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n > 0$  tal que  $\bar{\int}_a^b f(x)dx - \underline{\int}_a^b f(x)dx < \varepsilon$ .

Como  $f_m \leq f \leq F_m$ , então  $L(|f - f_m|) \leq L(F_m - f_m) = \bar{\int}_a^b f(x)dx - \underline{\int}_a^b f(x)dx < \varepsilon$ , o que conclui a demonstração do teorema. c.q.d



Apresentaremos a seguir o exemplo de uma função Riemann integrável que não é Lebesgue integrável.

Considere  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1, 1]. \end{cases}$$

Deixaremos como exercício que a função  $f$  não é Riemann integrável. Vamos verificar que a integral de Lebesgue de  $f$  existe.

Seja  $(f_m)$  uma sequência de funções escadas, onde  $f_m := 0$  para todo  $m$ . Mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(|f - f_m|) = L(f) = 0.$$

Seja  $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$  uma enumeração para  $\mathbb{Q}$  e considere a seguinte sequência de funções escadas admissível para  $f$ .

$S_i^1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$S_i^1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = q_i \\ 0, & \text{se } x \neq q_i. \end{cases}$$

Como  $L(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_I S_i = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$ , então  $f$  é Lebesgue integrável e  $\int_{[-1,1]} f = 0$ .

## Exercícios

1. Mostre que a função  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1, 1]. \end{cases}$$

não é Riemann integrável.

## Aula 3 - Propriedades da Integral de Lebesgue, Conjuntos Nulos e Teoremas de Congervência

### Objetivos

1. Apresentar as propriedades de Integral e Lebesgue.
2. Introduzir os conjuntos nulos.
3. Introduzir os teoremas de convergência.

Nesta aula enunciaremos alguns teoremas cujas demonstrações deixaremos a cargo das referências, pois nosso objetivo principal é demonstrar que  $L^p$  é um espaço completo, o que será feito nas últimas aulas desta unidade.

**Teorema 6**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é Lebesgue integrável se e somente se  $|f|$  também é Lebesgue integrável.

**Demonstração:** Basta observar que  $f = f^+ + f^-$  e  $|f| = f^+ - f^-$  e ambas são integráveis se e somente se  $f^+$  e  $f^-$  o são. c.q.d.

**Teorema 7** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  for Lebesgue integrável, então  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ .

**Teorema 8 (Linearidade)** Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções Lebesgue integráveis e  $\alpha$  e  $\beta$  números reais, então  $\alpha f + \beta g$  são Lebesgue integráveis e  $\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$ .

**Definição 34** Diz-se que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função nula se  $L(|f|) = 0$ .

Dado um conjunto  $S$ , consideraremos, frequentemente, uma função que indica a sua presença - a função característica, definida a seguir.

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in S \\ 0, & \text{se } x \notin S. \end{cases}$$

**Definição 35** Diz-se que  $S \subset I$  é um conjunto nulo se  $\chi_S$  for uma função nula.

Ficará como exercício a prova que  $S$  é um conjunto nulo se e somente se  $\int_I \chi_S = 0$ .

Diz-se que uma propriedade vale para quase todo ponto (q.t.p) se tal propriedade vale em todo o intervalo  $I$  exceto por um subconjunto nulo de  $I$ .

**Teorema 9** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  função. Então  $f$  é função nula se, e somente se,  $f = 0$  q.t.p., ou seja,  $f(x) = 0$  para todo ponto  $x$  de  $I$  exceto para pontos em um conjunto nulo.*

**Teorema 10** *Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lebesgue integrável e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g = f$  q.t.p. Então  $g$  é Lebesgue integrável e  $\int_I g = \int_I f$ .*

A demonstração dos dois teoremas a seguir podem ser consultadas em qualquer referência sobre teoria da medida e integração. Usaremos esses teoremas para provar, mais adiante, que  $L^p$  é um espaço completo.

**Teorema 11** *(Teorema da Convergência Monótona)*

*Seja  $f_1, f_2, \dots$  sequência de funções Lebesgue integráveis em  $I$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n < \infty$ . Suponha que exista o limite q.t.p. dessa sequência, ou seja, que exista uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  q.t.p. Então  $f$  é Lebesgue integrável em  $I$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$ .*

**Teorema 12** *(Lema de Fatou)* *Seja  $f_1, f_2, \dots$  uma sequência não negativa, isto é,  $f_i \geq 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , Lebesgue integráveis em  $I$ . Suponha que exista uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  q.t.p. Então,  $f$  é Lebesgue integrável em  $I$  se e somente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \inf_{m \geq n} \int_I f_m \} < \infty$ . Nesse caso,  $\int_I f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \inf_{m \geq n} \int_I f_m \}$ .*

## Exercícios

1. Prove que  $S$  é um conjunto nulo se e somente se  $\int_I \chi_S = 0$ .

## Aula 4 - O Espaço $L^p$

### Objetivos

1. Apresentar o Espaço  $L^p$ .
2. Apresentar e demonstrar as desigualdades de Minkowski e Hölder.

Iniciaremos esta aula, fazendo uma observação a respeito do espaço das funções contínuas  $C([a, b])$  munido da norma  $\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ , onde  $1 \leq p < \infty$ .

Na aula que introduzimos a Integral de Lebesgue, mostramos que se  $p = 1$ , então o espaço  $C([a, b])$  não é completo. Para  $1 \leq p < \infty$ , o resultado é análogo, isto é,  $C([a, b])$  não é completo.

Construiremos agora espaços completos que contenham  $C([a, b])$ , os espaços  $L^p$  para  $1 \leq p < \infty$ . A norma sobre os espaços  $L^p$  coincide com a  $\|\cdot\|_p$  em  $C([a, b])$ . Além disso,  $C([a, b])$  será denso em  $L^p([a, b])$ .

**Definição 36** Definimos  $\mathbb{L}^p$  por ser o conjunto das funções mensuráveis tais que  $f^p$  seja Lebesgue Integrável e tenha integral finita, isto é,  $\left( \int_I |f(x)|^p dx \right) < \infty$ .

Para  $f$  e  $g$  duas funções em  $\mathbb{L}^p$  defina a seguinte relação:

$$f \sim g \text{ se, e somente se } f = g \text{ q.t.p.}$$

Deixamos como exercício mostrar que  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{L}^p$ .

Vamos agora definir os espaços  $L^p$ .

**Definição 37** Definimos  $L^p$  como sendo o conjunto das classes de equivalência de  $\sim$  em  $\mathbb{L}^p$ .

Observe que  $f = g$  em  $L^p$  se, e somente se,  $f \sim g$ . Portanto, temos que  $f = g$  em  $L^p$  se e somente se,  $f = g$  a menos de um conjunto nulo.

Apresentaremos a seguir uma dessas representações.

**Exemplo 20**  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = 1$  para todo  $x \in [0, 1]$  e

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Essas funções estão na mesma classe de equivalência, já que ambas valem 1 q.t.p. Logo, em  $L^p$ , representam a mesma função.

Terminaremos esta aula apresentando duas desigualdades importantes na teoria de integração, a saber, as desigualdades de Minkowski e Hölder. Mas antes, vamos apresentar um Teorema que pode ser demonstrado usando as propriedades da integral de Lebesgue e módulo de um número real.

**Teorema 13** *Sejam  $f$  e  $g$  em  $L^1$ , então  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ .*

Antes de apresentarmos as desigualdades citadas acima, faremos um Lema que nos auxiliará nas demonstrações.

**Lema 2** *Sejam  $x$  e  $y$  números reais não negativos. Então  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*

**Demonstração:** Considere a seguinte função  $\varphi(x) = xy - \frac{x^p}{p}$ , onde  $y \in \mathbb{R}$ . O máximo de  $\varphi$  é atingido em  $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ . Logo, fixando  $y$  não negativo,  $\varphi(x) \leq \varphi(y^{\frac{1}{p-1}})$  para todo  $x$  não negativo.

Logo, temos que

$$xy - \frac{x^p}{p} \leq y^{\frac{1}{p-1}}y - \frac{(y^{\frac{1}{p-1}})^p}{p} = \frac{p-1}{p}y^{\frac{p}{p-1}}.$$

Agora, como  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , temos que  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$  e, conseqüentemente,  $q = \frac{p}{p-1}$ . Portanto, segue que

$$xy - \frac{x^p}{p} \leq \frac{y^q}{q} \qquad \text{c.q.d.}$$

**Teorema 14** *Sejam  $p$  e  $q$  satisfazendo  $1 < p < \infty$  e  $1 < q < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Suponha que  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ . Então  $fg \in L^1$  e*

(a) *Desigualdade de Minkowski:*

$$\left(\int_I |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

(b) *Desigualdade de Hölder: Se  $q$  é tal que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ ,*

$$\int_I |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

ou seja,  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

**Demonstração:** Fica como exercício a demonstração desse teorema no caso em que  $f = 0$  q.t.p. ou  $g = 0$  q.t.p.

Suponha que nem  $f$  nem  $g$  seja 0 q.t.p., ou seja, que  $f$  não seja a função representada por 0 em  $L^p$  e  $g$  não seja a função representada por 0 em  $L^q$ .

Como  $\frac{|f(x)|}{\|f\|}$  e  $\frac{|g(x)|}{\|g\|}$  são não negativos podemos usar o **Lema** anterior. Logo, temos que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|^p \|g\|^q} \leq \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q}$$

e a desigualdade de Hölder fica demonstrada.

Vamos agora demonstrar a desigualdade de Minkowski. Deixaremos o caso em que  $f + g = 0$  fica como exercício.

Suponha então que  $f + g \neq 0$ . Daí, temos que

$$\|f + g\|_p^p = \int_I |f + g|^p = \int_I |f + g| |f + g|^{p-1} = \int_I |f| |f + g|^{p-1} + \int_I |g| |f + g|^{p-1}.$$

Pela desigualdade de Hölder,  $\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f + g\|_q^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_q^{p-1} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_q^{p-1}$ .

Agora,  $\|(f + g)^{p-1}\|_q = \left(\int_I (f + g)^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|f + g\|_{(p-1)q}^{p-1} = \|f + g\|_p^{p-1}$ , pois  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , o que acarreta em  $q + p = q \cdot p$  e  $(p - 1)q = q + p - q = p$ .

Portanto  $\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_q^{p-1} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}$ . E a desigualdade de Minkowski segue daí. c.q.d.

## Exercícios

1. Demonstre o **Teorema 13**.
2. Demonstre a desigualdade de Hölder no caso em que  $f = 0$  q.t.p. ou  $g = 0$  q.t.p.

## Aula 5 - $L^p$ é Espaço de Banach

### Objetivos

1. Demonstrar que  $L^p$  é um espaço vetorial normado.
2. Demonstrar que  $L^p$  é um espaço de Banach.

Nesta aula, apresentaremos as demonstrações de que  $L^p$  é um espaço de Banach. Num primeiro momento, vamos demonstrar que  $L^p$  é um espaço vetorial normado e depois que é um espaço completo.

Começaremos com o seguinte:

**Teorema 15** Para todo  $p \in [1, \infty)$ ,  $L^p$  é um espaço vetorial normado com a norma  $\|f\|_p := (\int_I |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ .

**Demonstração:** Primeiro vamos demonstrar que  $L^p$  é um espaço vetorial.

Sejam  $f$  e  $g$  estão em  $L^p([a, b])$  e  $\alpha$  é um número real. Então  $f + \alpha g$  é mensurável, já que  $f$  e  $g$  o são.

Além disso, pela desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned} \left( \int_a^b |f(x) + \alpha g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |\alpha g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + |\alpha| \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \end{aligned}$$

já que  $(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$  e  $(\int_a^b |g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$ .  
Portanto,  $L^p([a, b])$  é espaço vetorial.

Vamos agora demonstrar que  $L^p([a, b])$  é um espaço vetorial normado com a norma citada. Para tanto, devemos verificar as propriedades da função norma, apresentadas na Primeira aula do curso.



1)  $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$  para todo  $f \in L^p([a, b])$  e  $\|f\| = 0$  se e só se  $\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ , ou seja, se e só se  $f = 0$ .

Observação:  $f = 0$  significa que estamos identificando em  $f$  todas as funções cujas integrais de seus módulos sejam zero, podemos representar  $f$  por exemplo pela função identicamente nula.

2)  $\|\alpha f\| = \left(\int_a^b |\alpha f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ , para toda função  $f$  de  $L^p([a, b])$ .

3)  $\|f+g\| = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| + \|g\|$ , para todas funções  $f$  e  $g$  em  $L^p([a, b])$ . c.q.d.

Encerraremos a aula apresentando o Teorema que garante que  $L^p$  é de fato um espaço completo com a norma acima.

**Teorema 16**  $L^p$  é espaço de Banach para todo  $p \in [1, \infty)$ .

**Demonstração:** Vamos demonstrar aqui o caso  $p = 1$ . Os outros casos mais gerais podem ser demonstrados de maneira análoga, utilizando a desigualdade de Minkowski.

É importante lembrar que qualquer elemento de  $L^1$  pode ser representado por qualquer um de  $\mathbb{L}^1$  de sua classe de equivalência. E faremos isso, quando falarmos de uma função de  $L^1$ , na verdade estaremos falando sobre uma função de  $\mathbb{L}^1$  que a represente.

Seja  $f_n$  uma sequência de Cauchy em  $L^1$ . Mostraremos que existe uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que uma subsequência de  $f_n$  convirja uniformemente absolutamente a  $f$  q.t.p. Com isso em mãos, mostraremos que  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1$  e que  $f \in L^1$ , ou seja, que  $L^1$  é completo.

Dando prosseguimento à demonstração, como  $f_n$  é uma sequência de Cauchy, existe uma subsequência  $f_{n_k}$  de  $f_n$  tal que  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$

Como queremos provar que  $f_{n_k}$  converge uniformemente absolutamente para alguma função, é suficiente provar que a função  $g_m(x) := \sum_{k=1}^m |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|$  converge uniformemente.

Seja  $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_m(x)$ . Vamos provar que  $g(x) < \infty$  q.t.p.  $x \in I$ .

Como cada elemento da sequência  $f_n$  está em  $L^1$  então  $g_m$  também está em  $L^1$ . Logo,

$$\|g_m\|_1 = \int_I g_m = \int_I \sum_{k=0}^m |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^m \int_I |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| = \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_1 \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} < 1$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona,  $g_m \rightarrow g$  em  $L^1$ . Consequentemente  $g \in L^1$ , ou seja  $\int_I g < \infty$  e  $g(x) < \infty$  q.t.p.  $x \in I$ .

Logo,  $f_{n_j}$  é uma sequência absolutamente convergente q.t.p., já que  $f_{n_j} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^j f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$  é uma sequência absolutamente convergente q.t.p., pois  $g_j$  é convergente q.t.p.

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal limite q.t.p. de  $f_{n_j}$ . Provaremos que  $f_{n_k} \rightarrow f$  em  $L^1$  e que  $f \in L^1$ , ou seja, que  $L^1$  é completo.

Como  $f_n$  é sequência de Cauchy em  $L^1$ , então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  suficientemente grande tal que para todo  $n \geq N$  vale  $\liminf_m \{\|f_m - f_n\|_1\} \leq \varepsilon$ .

Desta maneira, temos que as hipóteses do Lema de Fatou são satisfeitas para a sequência de funções em  $L^1$ ,  $h_m := |f_m - f_n|$ , a saber,  $\liminf_m \left\{ \int_I h_m \right\} \leq 1$ , e  $h_m \rightarrow |f - f_n|$  q.t.p.

Portanto, pelo Lema de Fatou,  $|f - f_n|$  é integrável em  $I$  e  $\|f - f_n\| < \varepsilon$ , ou seja,  $f \in L^1$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1$ . c.q.d.

## Exercícios

1. Demonstre o teorema de Banach no caso  $1 < p < \infty$ .

## REFERÊNCIAS

CARTER, M., VAN BRUNT, B. **The Lebesgue-Stieltjes integral: a practical introduction**, New York: Springer-Verlag, 2000.

FERNANDEZ, Pedro Jesus. **Medida e integração**. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

OLIVEIRA, C. R. **Introdução à análise funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

SAXE, K. **Beginning functional analysis**. New York: Springer-Verlag, 2002.



