UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SÃO JOÃO DEL-REI

MATEMÁTICA

Curso de pós-graduação
"lato sensu"

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Carlos Alberto Raposo da Cunha
Jorge Andrés Julca Ávila

Universidade Aberta do Brasil
Núcleo de Educação a Distância
Universidade Federal de São João del-Rei

Pós-graduação “lato sensu”
Curso de Matemática

Equações Diferenciais Parciais

Carlos Alberto Raposo da Cunha
Jorge Andrés Julca Avila

UFSJ
MEC / SEED / UAB
2009

E64 Equações diferenciais parciais / Carlos Alberto Raposo da Cunha; et al. – São João del-Rei, MG : UFSJ, 2009. – São João del-Rei, MG : UFSJ, 2009.
62p.

Apostila do curso de Pós-graduação "lato sensu" em Matemática.

1. Equações diferenciais parciaisl. 2. Matemática I. Cunha, Carlos Alberto Raposo da II. Avila, Jorge Andrés Julca III. Título
CDU: 517.95

Edição
Núcleo de Educação a Distância - NEAD-UFSJ
Conselho Editorial NEAD-UFSJ

Capa / Diagramação
Luciano Alexandre Pinto

Tiragem 500 exemplares

SUMÁRIO

PRA COMEÇO DE CONVERSA...

Olá! Seja bem-vindo ao Módulo da Disciplina Equações Diferenciais Parciais.

Este módulo foi escrito com o objetivo de apresentar de forma resumida e didática, os aspectos necessários ao estudo moderno da estabilidade exponencial de modelos dissipativos governados por equações diferenciais parciais.

Abordaremos três métodos distintos. Para ilustrar os métodos consideramos o importante modelo matemático que descreve as pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento $L > 0$.

Para atingirmos nosso objetivo apresentamos os fundamentos da Teoria das Distribuições, dos Espaços de Sobolev e da Teoria de Semigrupos.

Dividimos o conteúdo em quatro Unidades e cada Unidade em Aulas. Ao fim de cada Aula, incluímos uma atividade e indicamos as referências bibliográficas.

Recomendamos que o aluno faça cada atividade proposta antes de iniciar o estudo da Aula seguinte.

Esperamos que o leitor sinta o prazer de estudar este livro na mesma proporção que os autores sentiram ao elaborar cuidadosamente cada conteúdo apresentado.

Agradecemos à equipe do NEAD/UFSJ pelo apoio na produção deste material.

Os autores.

Unidade I

DISTRIBUIÇÕES

Aula 1 - Funções Generalizadas

Objetivo

Generalizar a noção de função.

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região ocupada por uma membrana fina fixada ao longo da fronteira $\partial\Omega$ sobre a qual atua uma força vertical, então o deslocamento dessa membrana na direção vertical é determinado por uma função $u = u(x, y)$ que satisfaz a equação diferencial parcial $(1) - (2)$

$$\begin{aligned} -\Delta\, u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \qquad (1)\\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \qquad (2) \end{aligned}$$

onde Δ é o Operador Laplaciano definido por

$$\Delta\, u = u_{xx} - u_{yy}.$$

Observe que a equação diferencial parcial envolve as derivadas de segunda ordem da função $u = u(x, y)$.

Dizemos que $u = u(x, y)$ é uma **solução clássica** de $(1) - (2)$ quando $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e satifaz a equação ponto a ponto.

Seja então $u = u(x, y)$ uma **solução clássica**, multiplicando (1) por u e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta\, u.u\, dA = \int_\Omega f.u\, dA.$$

Agora, vamos integrar por partes

$$[\nabla\, u.u]_{\partial\Omega} + \int_\Omega \nabla\, u.\nabla u\, dA = \int_\Omega f.u\, dA.$$

Utilizando (2), obtemos

$$\int_\Omega \nabla\, u.\nabla u\, dA = \int_\Omega f.u\, dA.$$

Então, o problema de obter uma solução para $(1) - (2)$ se restringe a obter uma função u que minimize o seguinte funcional

$$J(v) = \int_\Omega \nabla\, u.\nabla u\, dA - \int_\Omega f.u\, dA.$$

Agora, note que

$$\nabla u = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$$

e, portanto,

$$\nabla u.\nabla u = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j}).(u_x \vec{i} + u_y \vec{j}) = u_x^2 + u_y^2.$$

Logo, podemos escrever o funcional J do seguinte modo

$$J(v) = \int_\Omega \left[u_x^2 + u_y^2\right] dA - \int_\Omega f.u\, dA. \tag{3}$$

Um fato surpreendente em (3) é que na definição do funcional J não estão aparecendo derivadas de segunda ordem.

Precisamos estabelecer a conexão entre o problema (1)-(2) e minimizar o funcional definido em (3), isto é, embora u possa não ser duas vezes derivável no sentido clássico, ainda assim, u é solução do problema (1)-(2) no sentido fraco.

Esse exemplo mostra que precisamos generalizar a noção de solução de uma equação diferencial parcial, o que nos impõe a necessidade de um novo conceito de função derivável.

Em outras palavras, iremos apresentar uma nova classe de objetos, chamada de **distribuições**. Nessa classe, poderemos definir uma derivada generalizada, a qual será fundamental no estudo moderno de Equações Diferenciais Parciais.

Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua.

Denominamos suporte de ϕ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde ϕ não se anula.

Denotamos o suporte de ϕ por $supp\,(\phi)$ e do ponto de vista matemático escrevemos

$$supp\,(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi\,(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando essa definição, concluímos que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual ϕ se anula.

Seja $\phi : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = 1, \forall x \in (0,1)$.

Verifica-se que o $supp\,(\phi) = (0,1)$ não é um conjunto compacto.

Neste nosso estudo, daremos um destaque especial as funções $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que sejam infinitamente diferenciáveis.

Com esse intuito, definimos o espaço $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em Ω.

Os elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Considere agora $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\quad r > 0$, denotamos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, definimos $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\phi(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \exp\left(\frac{r^2}{\|x-x_0\|^2 - r^2}\right) & \text{se } \|x - x_0\| < r \\ 0 & \text{se } \|x - x_0\| \geq r. \end{array} \right\}$$

Nesse exemplo, verificamos que $supp\,(\phi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $\mathcal{D}(\Omega)$ é, portanto não-vazio.

A seguir, daremos uma noção de convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1 *Uma sequência de funções $\{\phi_n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge a 0 se existir um conjunto compacto e fixado $K \subset \Omega$ com supp$(\phi_n) \subset K$ para todo n e tal que ϕ_n e todas as suas derivadas convergem a 0 uniformemente em K.*

O espaço vetorial $\mathcal{D}(\Omega)$, junto com essa noção de convergência é um espaço vetorial topológico.

O Espaço das Distribuições

Vamos começar esta seção com uma definição

Definição 2 *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte condição:*

$$\phi_n \to 0 \quad em \quad \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T(\phi_n) \to 0.$$

O espaço das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vamos agora ver um exemplo de distribuição

Exercício 1 *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável se para todo conjunto compacto, $K \subset \Omega$,*

$$\int_K |f(x)|\, dx < \infty.$$

Evidentemente, toda função contínua é localmente integrável.

Considere então f uma função localmente integrável e defina $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx.$$

É fácil ver que T_f é um funcional linear, pois para todo $c \in \mathbb{R}$ e ϕ, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} T_f(c\phi + \psi) &= \int_\Omega f(x)[c\phi + \psi]\,dx \\ &= c\int_\Omega f(x)\phi\,dx + \int_\Omega f(x)\psi\,dx \\ &= cT_f(\phi) + T_f(\psi). \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que T_f é uma distribuição. Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência de funções com $\phi_n \to 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T_f(\phi_n) = \int_\Omega f(x)\phi_n(x)\,dx \to \int_\Omega f(x).0\,dx = 0.$$

Se f e g são duas funções localmente integráveis tal que $f = g\,a.e.$ então $T_f = T_g$. Em particular, se $f = 0\,a.e.$, então f define a distribuição nula.

Por outro lado, se $T_f = 0$, então $f = 0\,a.e.$ pois f é localmente integrável.

De agora em diante, não iremos mais fazer distinção entre função localmente integrável f e a distribuição T_f gerada por f.

Ao dizermos que a distribuição T é uma função, estamos afirmando que existe uma função localmente integrável f, tal que $T = T_f$.

Uma propriedade importante é que o espaço das distribuições é bem maior que os espaço das funções localmente integráveis, neste sentido, temos que a função delta de Dirac, definida abaixo

$$\delta(\phi) = \phi(0) \quad \text{para cada} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

é uma distribuição que não pode ser gerada por nenhuma função localmente integrável.

Do ponto de vista físico, a distribuição delta de Dirac representa a densidade de uma grandeza concentrada em um único ponto. Assim, se por exemplo, temos um ponto material de massa m localizado na posição x_0 da reta real, dizemos que a densidade de massa desse ponto é dada por

$$\rho(x) = m\,\delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivadas de distribuição Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição qualquer, definimos sua derivada como sendo a distribuição dada por

$$T^{'}(\phi) = -T(\phi) \quad \text{para toda} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Agora, note que

$$T^{''}(\phi) = -T^{'}(\phi') = T(\phi'')$$

e, de um modo geral,

$$T^{k}(\phi) = (-1)^k T(\phi^k).$$

Vamos, agora, na prática, calcular a derivada de uma distribuição. Considere a função de Heaviside definida em $\mathbb{R}$, isto é,

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } \ x \geq 0 \\ 0 & \text{se } \ x < 0 \end{array} \right\}$$

Seja T_H a distribuição gerada por H e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, então

$$\frac{d\,T_H}{dx}(\phi) = -T_H(\frac{d\phi}{dx}) = -\int_0^\infty \frac{d\phi}{dx}\,dx = \phi(0) = \delta(\phi),$$

de onde segue que

$$\frac{d\,T_H}{dx} = \delta.$$

Esse exemplo responde a seguinte pergunta:

Qual a relação entre a distribuição gerada pela derivada clássica de uma função e a distribuição gerada pela função?

A resposta é que não é necessariamente a mesma. A derivada da função de Heaviside é a função nula que gera a distribuição $T \equiv 0$, enquanto a derivada da distribuição gerada por H é a distribuição δ de Dirac.

Para finalizar esta Aula, vamos mostrar a que a derivada no sentido das distribuições, quando restrita às funções do cálculo, é exatemante a derivada clássica.

Seja f uma função real com derivada f' em um aberto $\Omega \in \mathbb{R}$. A derivada no sentido das distribuições é calculada como segue

$$\frac{df}{dx}(\phi) = -f(\phi') = -\int_\Omega f(x)\phi'(x)\,dx = \int_\Omega f'(x)\phi(x)\,dx = f'(\phi),$$

logo, temos

$$\frac{df}{dx}(\phi) = f'(\phi) \quad \text{para toda} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{e então} \quad \frac{df}{dx} = f'.$$

Atividade

Prove que a função δ, delta de Dirac, não pode ser gerada por nenhuma função localmente integrável, isto é, não existe f localmente integrável, tal que $T_f = \delta$.

Referências

S. Kesavan; *Functional Analysis and Applications.* John Wiley & Sons, Inc. New York, (1989).

H. Brezis; *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, (1984).

Aula 2 - Solução Fraca

Objetivo

Compreender a notação multi-índice da definição dos espaços de Sobolev.

Introdução

Vamos, agora, introduzir o conceito de solução fraca para o problema

$$\begin{aligned} -\Delta\, u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 && (4) \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega && (5) \end{aligned}$$

onde Δ, conforme definido na seção anterior, é o Operador Laplaciano

$$\Delta\, u = u_{xx} - u_{yy}.$$

Suponha que $u = u(x, y)$ seja uma **solução clássica** de $(4) - (5)$. Multiplicando (4) por u e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta\, u \cdot u\, dA = \int_\Omega f \cdot u\, dA.$$

Agora, integrando por partes e usando o fato de que $\phi = 0$ na fronteira Γ, deduzimos que

$$\int_\Omega \nabla\, u \cdot \nabla u\, dA = \int_\Omega f \cdot u\, dA. \tag{6}$$

Lembrando que

$$\nabla\, u = u_x\, \vec{i} + u_y\, \vec{j}$$

temos

$$\nabla\, u \cdot \nabla u = (u_x\, \vec{i} + u_y\, \vec{j}) \cdot (u_x\, \vec{i} + u_y\, \vec{j}) = u_x^2 + u_y^2 \cdot$$

de onde segue

$$\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2) dA = \int_\Omega f \cdot \phi\, dA$$

e, portanto, as derivadas de primeira ordem da solução u do problema precisam satisfazer a seguinte condição

$$u_x \in L^2(\Omega), \;\; u_y \in L^2(\Omega)$$

e, portanto, nenhuma informação sobre a derivada de segunda ordem é solicitada. Isto nos permite introduzir um novo conceito de solução para o problema $(4) - (5)$.

Solução Fraca

Inicialmente, vamos introduzir a notação. Seja, então

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,:\, u_x, u_y \in L^2(\Omega)\}$$

e

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,:\, u_x, u_y \in L^2(\Omega) \;\text{ onde }\; u = 0 \;\text{ em }\; \Gamma\}.$$

Podemos provar que, se $u \in L^2(\overline{\Omega})$ e $u = 0$ em Γ, então $u \in H_0^1(\Omega)$.

Outro fato é que $\mathcal{D}(\Omega)$ é um conjunto denso em $H_0^1(\Omega)$.

Então, por densidade, segue de (6) que $u \in H_0^1(\Omega)$ é tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dA = \int_\Omega f \cdot \phi \, dA, \;\text{ para todo }\; \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{7}$$

sendo a igualdade acima no sentido das distribuições.

Definição 3 *Dizemos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma* **solução fraca** *para o problema* $(4) - (5)$ *quando satisfaz (7).*

Quando a função $f \in L^2(\overline{\Omega})$ e $\Omega \in \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e limitado, então a solução fraca u localizada em $H_0^1(\Omega)$ é única.

Outra observação importante é que, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ for uma solução fraca, então u é uma solução clássica.

Com razão, se $u = 0$ em Γ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ então pelo Teorema de Green, temos

$$\int_\Omega -\Delta u . \phi \, dA = \int_\Omega f . \phi \, dA$$

e, portanto, $-\Delta u = f$ no sentido das distribuições.

Considerando que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\overline{\Omega})$, podemos substituir ϕ por uma função em $L^2(\overline{\Omega})$.

Pelo exposto acima, temos

$$-\Delta u = f \;\text{ em }\; L^2(\overline{\Omega})$$

e, portanto, a igualdade vale quase sempre em Ω.

Acontece que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $-\Delta u$, $f \in C^2(\overline{\Omega})$, logo a igualdade vale em todos os pontos de Ω.

Notação Multi-índice

Vamos retomar o espaço

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \, : \, u_x, u_y \in L^2(\Omega)\}$$

e vamos escrever de um modo mais prático para os nossos futuros propósitos, isto é,

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \, : \, u_{x_1}, u_{x_2} \in L^2(\Omega)\}$$

onde $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Note que estamos exigindo que todas as derivadas de u de ordem 1 continuem em $L^2(\Omega)$.

Considere por analogia

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \, : \, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_2} \in L^2(\Omega)\}$$

e, note que agora estamos exigindo que todas as derivadas de u até ordem 2 continuem em $L^2(\Omega)$.

Precisamos escrever esse espaço de modo mais conviniente. Nesse sentido, vamos apresentar a seguinte notação introduzida por L. Schwartz.

Seja $x = (x_1, x_2)$, um multi-índice é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \geq 0$ e inteiros.

Associamos ao multi-índice α os seguintes símbolos

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} .....x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Agora definimos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .....\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Vamos tentar escrever $H^2(\Omega)$ com essa nova notação.

Vamos analizar todos os possíveis multi-índices para este caso

$$
\begin{aligned}
\alpha = (0,1) \quad &\Rightarrow \quad D^\alpha = \frac{\partial^{(1+0)}}{\partial x_1^1 \partial x_2^0} = \frac{\partial}{\partial x_1} \\
\alpha = (1,0) \quad &\Rightarrow \quad D^\alpha = \frac{\partial^{(0+1)}}{\partial x_1^0 \partial x_2^1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \\
\alpha = (0,2) \quad &\Rightarrow \quad D^\alpha = \frac{\partial^{(0+2)}}{\partial x_1^0 \partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
\alpha = (2,0) \quad &\Rightarrow \quad D^\alpha = \frac{\partial^{(2+0)}}{\partial x_1^2 \partial x_2^0} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\
\alpha = (1,1) \quad &\Rightarrow \quad D^\alpha = \frac{\partial^{(1+1)}}{\partial x_1^1 \partial x_2^1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned}
$$

e, finalmente, definimos

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,:\, D^\alpha \in L^2(\Omega) \ \text{ para todo } \ |\alpha| \leq 2\}.$$

Essa notação permite definir o espaço funcional apropriado ao estudo das Equações Diferenciais Parciais. Veremos isso na próxima Aula.

Aspecto Histórico Vamos concluir esta Aula com um breve relato da biografia de Laurent Schwartz (1915-2002), matemático que formulou a teoria das distribuições, a qual equaciona os mais complexos fenômenos e que foi motivada pela função delta de Dirac, originada da física teórica.

Conforme observamos, o conceito de distribuicão é extremamente natural. Distribuições generalizam, em um certo sentido, o conceito de função, sendo, portanto denominda em várias situações por "funções generalizadas".

Schwartz foi um consagrado matemático francês nascido em Paris, durante a Primeira Guerra Mundial, e o primeiro matemático da França a receber a Medalha Fields (1950), o mais importante prêmio internacional na área da matemática.

Schwartz foi sobrinho do professor Robert Debre, fundador da Unicef, concluiu seu Ph.D. pela Université Louis Pasteur, Strasbourg (1943), e foi orientado por Georges Valiron, Ph.D. da Université de Paris.

Ensinou na Faculdade de Ciências de Grenoble (1944-1945) e depois da guerra foi para Nancy, onde foi professor na faculdade de ciências local (1945-1953), período em que detalhou sua famosa teoria.

Poliglota, visitou o Brasil, ministrou palestras em português e aproveitou essa passagem para coletar borboletas tropicais para sua coleção, considerada uma das maiores do mundo, com cerca de 20 mil exemplares, e na qual chegou a classificar várias novas espécies.

Atividade

Considere o espaço funcional $H^2(\Omega)$ e por analogia

$$H^3(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,:\, D^\alpha \in L^2(\Omega) \;\text{ para todo }\; |\alpha| \leq 3\}.$$

e explicite todos os multi-índices α.

Referências

S. Kesavan; *Functional Analysis and Applications.* John Wiley & Sons, Inc. New York, (1989).

L. A. Medeiros & M. M. Miranda; *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos nº 25, IM-UFRJ, (1993).

Unidade II

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Aula 1 - Fundamentos

Objetivo

Definir Espaço de Sobolev e provar que esse espaço é Banach, separável, reflexivo e uniformemente convexo.

Introdução

Iniciamos esta seção lembrando que a derivada de uma função L^1_{loc} não é, em geral, uma função L^1_{loc}.

Conforme vimos a função de Heaviside pertence a $L^1_{loc}(0,1)$, mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(0,1)$.

Esse fato nos motiva a definir uma classe importante de espaços de Banach, na qual a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$ permaneça sendo uma função $L^1_{loc}(\Omega)$.

Denominamos o espaço funcional com esta propriedade de **Espaço de Sobolev**.

Conforme foi brevemente discutido, o **Espaço de Sobolev** é o ambiente natural para o estudo das Equações Diferenciais parciais.

A definição geral é a seguinte

Definição 4 *Seja $m > 0$ um inteiro positivo e $0 \leq p \leq \infty$. Considere Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ com fronteira denotada por Γ. Definimos o* **Espaços de Sobolev** *como abaixo*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \,:\, D^\alpha \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Entretanto, neste curso, iremos nos restringir a $p = 2$. Assim sendo, usaremos a seguinte notação

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Com mais precisão, iremos nos restringir aos casos em que $m = 1$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,:\, D^\alpha \in L^2(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq 1\}$$

e $m = 2$

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,:\, D^\alpha \in L^2(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq 2\}.$$

Também iremos desenvolver o estudo em dimensão 1, isto é, iremos considerar Ω um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ com fronteira denotada por Γ.

Completude

Vamos mostrar que o Espaço de Sobolev é um Espaço de Banach.

Observe da **Definição 2.1** que $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Nesse sentido, temos

$$H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega). \tag{8}$$

Obviamente, $H^m(\Omega)$ é um espaço vetorial, pois $L^2(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Agora, vamos definir em $H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ uma norma do seguinte modo

$$||u|| = \sum_{|\alpha| \geq m} ||D^\alpha u||_{L^2(\Omega)}.$$

Resta mostrar que $H^m(\Omega)$ é completo. Para isso, considere $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $H^m(\Omega)$. Por definição, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^{\infty}$ são sequências de Cauchy em $L^2(\Omega)$.

A priori, $u \in L^2(\Omega)$ e, portanto, precisamos mostrar que $u \in H^m(\Omega)$.

Do fato de $L^2(\Omega)$ ser completo, segue que

$$\begin{aligned} u_n &\to u \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \\ D^\alpha u_n &\to u_\alpha \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Para cada n derivando u_n no sentido das distribuições temos

$$\int_\Omega u_n \, D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \, \phi \, dx \ \text{ para cada } \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Fazendo $n \to \infty$ e lembrando que convergência forte implica convergência fraca, obtemos

$$\int_\Omega u \, D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_\alpha \, \phi \, dx \ \text{ para cada } \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ segue que $u \in H^m(\Omega)$, logo $H^m(\Omega)$ é completo.

Propriedades Hereditárias e prolongamento

Vamos mostrar que o espaço $H^m(\Omega)$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo.

Considere o caso $m = 1$. Seja $T \, : \, H^1(\Omega) \to \left(L^2(\Omega)\right)^2$ definida por $T(u) = (u, u_x)$.

Temos $||T(u)|| = ||u||$, portanto, T é uma isometria e, então, T é uma bijeção entre $H^1(\Omega)$ e $T\left(H^1(\Omega)\right)$.

Conforme já vimos, $H^1(\Omega)$ é completo. Sua imagem por isometria é um subespaço próprio de $(L^2(\Omega))^2$ que herda as propriedades de $(L^2(\Omega))^2$, logo podemos afirmar que $H^1(\Omega)$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo, posto que $(L^2(\Omega))^2$ possui estas propriedades.

Prolongamento Dizemos que o operador P é de prolongamento quando

$$P \,:\, H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R})$$

é tal que

$$P(u(x)) = u(x) \;\text{ em quase todos os pontos de }\; \Omega$$

e, além disso

$$||P(u)|| \leq C||u||.$$

Esses operadores estendem as propriedades válidas em $H^m(\mathbb{R})$ para $H^m(\Omega)$.

Veja o seguinte exemplo. Suponha que P é um operador de prolongamento de $H^m(\Omega)$ para $H^m(\mathbb{R})$ e que

$$H^m(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$

então,

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq ||P(u)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq C||P(u)||_{H^m(\mathbb{R})} \leq C||u||_{H^m(\Omega)}$$

de onde segue que

$$H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Atividade

Prove que o espaço $H^2(\Omega)$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo.

Referências

S. Kesavan; *Functional Analysis and Applications.* John Wiley & Sons, Inc. New York, (1989).

R. A. Adams; *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York (1975).

Aula 2 - Resultados

Objetivo

Conhecer algumas imersões válidas no Espaço de Sobolev.

Introdução

Considere uma barra de comprimento L com densidade unitária. Vamos denotar por u o deslocamento e por θ a diferença de temperatura entre a barra e o meio ambiente. Suponha que as extremidades da barra estejam fixas e isoladas termicamente.

Seja $\Omega = (0, L)$, a, k, c_0 constantes positivas e α uma constantes não nula, então temos o seguinte modelo para as equações de momento e energia

$$\begin{aligned}
u_{tt} - au_{xx} + \alpha\theta_x &= 0, \text{ em } (\Omega) \times (0, \infty), \\
c_0\theta_t - k\theta_{xx} + \alpha u_{xt} &= 0, \text{ em } (\Omega) \times (0, \infty) \\
u(0, t) = u(L, t) &= 0, \; t > 0 \\
\theta(0, t) = \theta(L, t) &= 0, \; t > 0 \\
u(x, 0) &= u_0(x), \; x \in (\Omega), \\
u_t(x, 0) &= u_1(x), \; x \in (\Omega), \\
\theta(x, 0) &= \theta_0(x), \; x \in (\Omega).
\end{aligned}$$

O espaço de energia associado a esse modelo é

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Esse modelo pode ser escrito como

$$U_t - AU = 0,$$

com domínio do operador A,

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Na resolução deste problema é de fundamental importâcia que a imersão de $D(A)$ em H seja compacta.

Esse problema mostra a razão de estudar as imersões dos espaços de Sobolev.

Conforme a necessidade imposta no problema, estaremos particularmente interessados nas imersões compactas.

Um outro aspecto a ser observado nesse modelo é que aparece um espaço de Sobolev com a seguinte notação $H_0^1(\Omega)$. Esse espaço também será objeto de estudo nesta seção.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Para definirmos o espaço $H_0^1(\Omega)$ vamos começar com um breve estudo sobre a teoria do traço.

Para o estudo da teoria do traço, considere Ω um aberto em $\mathbb{R}^2$.

Demonstra-se que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por funções de

$$\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) = \{\phi_{|_{\overline{\Omega}}};\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$$

onde pode-se definir a restrição à fronteira Γ de Ω.

Definição 5 *Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com*

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \ \text{ em } \ H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k|_\Gamma ,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0, denominado operador de traço, é contínuo, linear e possui como núcleo o espaço $H_0^1(\Omega)$.

De forma mais simples, em vez de $\gamma_0(\varphi)$, escrevemos

$$\varphi|_\Gamma$$

e assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por

$$H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \ \varphi_{|_\Gamma} = 0\right\}.$$

A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|_\Gamma} = 0,\ \ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\Gamma = 0\right\}$$

Denotamos o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

Se $\varphi \in H^{-m}(\Omega)$, então $\varphi_{|_{\mathcal{D}(\Omega)}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

A caracterização do dual $H^{-m}(\Omega)$ é a seguinte

Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in H^{-m}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^2(\Omega)$, tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} g_{\alpha}$.

A caracterização de $H^{-1}(\Omega)$ é então: Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem 3 funções u_0, u_1, u_3 de $L^2(\Omega)$, tais que

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Para concluir, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador

$$\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\psi\Omega)$$

linear, contínuo e isométrico.

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^2(\Omega)$, em geral ele não é denso em $H^m(\Omega)$.

Isso ocorre porque a norma de $H^m(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^2(\Omega)$ e por isso $H^m(\Omega)$ possui menos sequências convergentes.

Esse fato motivou a definição dos espaços $H_0^m(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

Voltando ao nosso contexto, se $\Omega = (a, b)$ é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ temos o seguinte:

Para o caso $m = 1$,

$$H_0^1(\Omega) = \left\{\phi \in H^1(\Omega);\ \ \phi(a) = \phi(b) = 0\right\}.$$

Para o caso $m = 2$,

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\phi \in H^2(\Omega); \phi(a) = \phi(b) = 0,\ \ \phi_x(a) = \phi_x(b)\right\}.$$

Imersões e a Desigualdade de Poincarè-Friedrichs

Dizemos que o espaço normado X tem imersão contínua no espaço Y, i. é, $X \mapsto Y$ quando X for subespaço de Y e a aplicação identidade $I : X \to Y$ for contínua.

Para os espaços de Sobolev, quando $\Omega \in \mathbb{R}^n$ com $n = 1$ ou $n = 2$, temos o seguinte resultado

Teorema 1 *(Imersão de Sobolev)*

$$H_0^1(\Omega) \mapsto L^s(\Omega),\ \ 1 \leq s < \infty$$

Um operador linear $T : X \to Y$ é dito compacto se toda sequência limitada em $x_n \in X$ é levada em uma sequência $T(x_n) \in X$ que admite uma subsequência convergente em Y.

Nesse sentido, dizemos que o espaço normado X tem imersão compacta no espaço Y, i. é, $X \hookrightarrow Y$ quando X for subespaço de Y e a aplicação identidade $I : X \to Y$ for um operador compacto.

As imersões compactas são importantes para o estudo da existência de solução e comportamento assintótico de sistemas dissipativos governados por equações diferenciais parciais.

Para os espaços de Sobolev temos o seguinte teorema da imersão compacta

Teorema 2 *(Rellich-Kondrachov)*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \;\; 1 \leq s < \infty$$

Considerando que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, em particular, para os nossos propósitos estamos interessados na seguinte imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

Desigualdade de Poincaré-Friedrichs Vamos finalizar esta seção demonstrando uma desigualdade bastante utilizada na resolução de problemas em EDP.

Teorema 3 *(Desigualdade de Poincaré-Friedrichs)*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto limitado. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C \, ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, logo existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$, tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \to v \;\text{ em }\; L^2(\Omega) \;\text{ e }\; \frac{d\,\varphi_\nu}{dx} \to \frac{dv}{dx} \;\text{ em }\; L^2(\Omega).$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$, tais que $\forall x \in \Omega \;\; a < x < b$.

Agora dado $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos $\phi(a) = 0$ e, portanto,

$$\phi(x) = \int_a^x \frac{d\,\phi}{d\xi}\,(\xi)\,d\xi,$$

e da desigualdade de *Schwartz*, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{2} &= \left(\int_{a}^{b}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\xi\right)d\xi\right)^{2} \\ &\leq \left(b-a\right)\int_{a}^{b}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\xi\right)\right|^{2}d\xi.\end{aligned}$$

Aplicando o *Teorema de Fubini*, temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{2}dx &\leq \left(b-a\right)\int_{\Omega}\int_{a}^{b}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\xi\right)\right|^{2}d\xi dx \\ &\leq \left(b-a\right)^{2}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\xi\right)\right|^{2}d\xi\end{aligned}$$

portanto

$$||u||_{L^{2}(\Omega)} \leq C\,||\nabla u||_{L^{2}(\Omega)}.$$

□

Atividade

Utilizando a desigualdade de Poincaré-Friedrichs, prove que à norma $||u||_{H_0^1(\Omega)}$ de $H_0^1\left(\Omega\right)$ é equivalente a norma $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ em $L^2\left(\Omega\right).$

Referências

J. E. M. Rivera; *Introdução à Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* LNCC, Petrópolis, (2004).

R. A. Adams; *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, (1975).

Unidade III

SEMIGRUPOS E EDP

Aula 1 - C_0-Semigrupos

Objetivo

Escrever um sistema governado por Equações Diferenciais Parciais na forma de Cauchy, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t - A\mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{U}(0) &= \mathbf{U}_0 \end{aligned}$$

e explicitar o operador A.

Introdução

A função exponencial e^{tA}, onde A é um número real e t uma variável real, pode ser definida pela fórmula

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{9}$$

A série que figura no segundo membro da equação anterior converge para todos os valores reais de t e define uma função em $\mathbb{R}$.

Sem dificuldade alguma, mostra-se que essa definição se estende ao caso em que A é um operador linear limitado de um Espaço de Banach, X.

Neste caso, a série que aparece em (9) converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ a *álgebra dos operadores lineares limitados de* X e, portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, sua soma é um operador limitado desse espaço.

Problema bastante delicado, porém, é definir a "função exponencial" quando A é não limitado. Uma das razões de interesse em tal função é que, formalmente, ela é solução do seguinte problema de Cauchy:

Dado um operador linear não-limitado A, de um Espaço de Banach X, determinar uma função $\mathbf{U}(t) = e^{tA}$, definida em $\mathbb{R}^+$, com domínio $D(A)$ e que satisfaça as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t - A\mathbf{U} &= 0, \\ \mathbf{U}(0) &= \mathbf{U}_0. \end{aligned}$$

Nesse sentido temos a seguinte definição:

Definição 6 *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Dizemos que uma aplicação $\mathbf{S} : \mathbb{R}^+ \to Ł(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X, quando:*

1. $\mathbf{S}(0) = I$, *onde I é o operador identidade de X;*

2. $\mathbf{S}(t+s) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(s)$, *para todo par $s, t \in \mathbb{R}^+$.*

Dizemos que o semigupo $\mathbf{S}$ é de classe $\mathcal{C}_0$ se:

$$\lim_{t \to 0^+} ||(\mathbf{S}(t) - I)x|| = 0, \ \forall x \in X.$$

Dizemos que o semigrupo $\mathbf{S}$ é de contração, quando $||\mathbf{S}|| < 1$.

Agora, nosso objetivo é relacionar o semigrupo $\mathbf{S}$ com o operador linear A.

Gerador Infinitesimal

Definição 7 *O operador $A : D(A) \longrightarrow X$, definido por*

$$A(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{S}(h) - I}{h} x, \ \textit{para todo } x \in D(A),$$

onde $D(A)$, o domínio de A, é dado por:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \ \textit{existe o limite } \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{S}(h) - I}{h} x \right\},$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo $\mathbf{S}$.

Quando A é o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo $\mathbf{S}$, denotamos $\mathbf{S} = e^{At}$.

É fácil ver que:

↬ o conjunto $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

↬ $||\mathbf{S}(t)|| \leq M\, e^{w\,t}$ para todo $t \geq 0$ com $w > 0$ onde $M \geq 1$.

A principal propriedade do semigrupo é a seguinte

★ Seja A o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo $\mathbf{S}(t)$. Se $x \in D(A)$, então:

(i) $\mathbf{S}'(t)x = A\,\mathbf{S}(t)x$,

(ii) $\mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X)$

Vejamos a prova de (i). Para $x \in D(A)$, temos, por um lado

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_{+}^{'}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t+h)x - \mathbf{S}(t)x}{h} \\
&= \mathbf{S}(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{S}(h)x - x}{h} = \mathbf{S}(t)\, Ax = A\, \mathbf{S}(t)x.
\end{aligned}
$$

e, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_{-}^{'}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t-h)x - \mathbf{S}(t)x}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t-h)x - \mathbf{S}(t-h+h)x}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \mathbf{S}(t-h) \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{S}(h)x - x}{h} \\
&= \mathbf{S}(t)\, Ax = A\, \mathbf{S}(t)x.
\end{aligned}
$$

de onde segue $\mathbf{S}^{'}(t)x = A\, \mathbf{S}(t)x$.

Vamos à prova de (ii). É fácil ver que as aplicações

$$t \to \mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : X)$$

e

$$t \to \mathbf{S}^{'}(t)x \in C^0([0,\infty) : X),$$

logo,

$$t \to \mathbf{S}(t)x \in C^1([0,\infty) : X).$$

Note que $\mathbf{S}(t)x \in D(A)$ e, portanto, $\mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A))$, e, então,

$$\mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X).$$

Agora, vamos supor que $\mathbf{S}_1(t)$ e $\mathbf{S}_2(t)$ possuem o mesmo gerador infinitesimal A e vamos provar que $\mathbf{S}_1(t) = \mathbf{S}_2(t)$.

Considere a função $F(s) = \mathbf{S}_1(t-s)\mathbf{S}_2(s)$. Então,

$$
\begin{aligned}
F^{'}(s) &= -A\, \mathbf{S}_1(t-s)\mathbf{S}_2(s) + \mathbf{S}_1(t-s)\, A\, \mathbf{S}_2(s) \\
&= -\mathbf{S}_1(t-s)\, A\, \mathbf{S}_2(s) + \mathbf{S}_1(t-s)\, A\, \mathbf{S}_2(s) = 0,
\end{aligned}
$$

logo, $F^{'}(s)$ é uma função constante. Agora, note que

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \mathbf{S}_1(t)\mathbf{S}_2(0) = \mathbf{S}_1(t) \\
F(t) &= \mathbf{S}_1(0)\mathbf{S}_2(s) = \mathbf{S}_2(t),
\end{aligned}
$$

de onde segue $\mathbf{S}_1(t) = \mathbf{S}_2(t)$.

Resumindo, definindo $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$ mostramos que $U'(t) = AU(t)$ e que $U(0) = U_0$; logo, $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$ é solução do seguinte problema de evolução

$$\begin{cases} U_t - AU = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{10}$$

e, além disso, essa solução satisfaz $U \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X)$.

Observe também que, sendo A o gerador infinitesimal de $\mathbf{S}(t)$, podemos afirmar que $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$ é a única solução de (10).

Resultados

Neste momento, é fundamental entender que, na tentativa de resolver o problema (10), a questão central é obter as condições necessárias e suficientes para que o operador linear A seja gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo $\mathbf{S}(t)$.

Nesse sentido, iremos apresentar os importantes teoremas de Hille-Yousida e Lummer-Phillips, que respondem a essa questão central.

Teorema de Hille-Yousida Para simplificar a notação, vamos escrever $A \in G(M,\omega)$, para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo, que satisfaz a condição

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{\omega t},\ t \geq 0.$$

Com essa notação A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações

$$\mathbf{S}(t) = e^{At}$$

quando $A \in G(1,0)$.

Uma condição necessária e suficiente para $A \in G(1,0)$ é a seguinte

Teorema 4 *(Hille - Yousida) Um operador linear A sobre X satisfaz:*

- A é fechado e densamente definido

- $\exists\ (\lambda I - A)^{-1}\ \forall\ \lambda > 0$ e $||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$ onde I é o operador identidade,

se, e somente se,

A é gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo de contrações $\mathbf{S}(t)$.

Teorema de Lummer-Phillips Agora, apresentamos outra caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos de contrações, o teorema de Lummer-Phillips, o qual será utilizado para obter a existência e unicidade de solução para os modelos que iremos estudar neste texto.

Para entender o teorema, iniciamos denotando por X^* o dual do espaço de Banach X e por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Agora introduzimos o conjunto

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2\}$$

e observamos que, pelo teorema de Hahn-Banach, $F(x)$ é nã vazio.

Definição 8 *Dizemos que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo quando*

$$Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0,$$

para todo $x \in D(A)$.

Lema 1 *Um operador A é dissipativo se, e somente se*

$$||(\lambda I - A)x|| \geq \lambda ||x||, \text{ para todo } x \in D(A),\ \lambda > 0.$$

Demonstração: Se A é dissipativo, para todo $\lambda > 0$, $x \in D(A)$ e $x \in F(x)$, teremos

$$||\lambda x - Ax||\, ||x|| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \geq Re\,\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \geq \lambda ||x||^2,$$

de onde segue a primeira parte da demonstração.

Reciprocamente, seja $x \in D(A)$ e suponha que $\lambda||x|| \leq ||\lambda x - Ax||$ para todo $\lambda \geq 0$. Tome $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e denote por $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{||y_\lambda^*||}$. Logo, temos $||z_\lambda^*|| = 1$.

Note que, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lambda||x||^2 \leq ||\lambda x - Ax||^2 &= \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^*\rangle \\ &\leq \lambda\, Re\,\langle x, z_\lambda^*\rangle - Re\,\langle Ax, z_\lambda^*\rangle \\ &\leq \lambda||x||^2 - Re\,\langle Ax, z_\lambda^*\rangle. \end{aligned}$$

Das relações acima, obtemos

$$Re\,\langle Ax, z_\lambda^*\rangle \leq 0 \ \text{ e } \ Re\,\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq ||x|| - \frac{1}{\lambda}||Ax||. \tag{11}$$

Sendo a bola unitária compacta na topologia fraca estrela, segue que existe $z^* \in X^*$, com $||z^*|| \leq 1$ e tomando limite com $\lambda \to \infty$ temos:

$$Re\,\langle Ax, z^*\rangle \leq 0 \ \text{ e } \ Re\,\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq ||x||.$$

Portanto, $\langle Ax, z^* \rangle \geq ||x||$. Logo, tomando $x^* = ||x|| z^*$, temos que

$$x^* \in F(x) \ \text{ e } \ Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

De onde, concluimos que A é dissipativo. $\square$

Agora estamos em condições de enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 5 *(Lumer-Phillips)*

(i) *Seja A dissipativo e $\lambda_0 > 0$ tal que a $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então $A \in G(1,0)$.*

(i) *Se $A \in G(1,0)$, então A é dissipativo e, para todo $\lambda > 0$, temos que*

$$Im(\lambda I - A) = X.$$

Atividade

Representamos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal de cada ponto $x \in (0,L)$ de corda no instante $t \geq 0$ a partir de sua posição de equilíbrio. Nesse sentido temos o seguinte modelo

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in (0,L), \\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Faça $v = u_t$ e

$$\mathbf{U} = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right).$$

Com essa idéia, escreva a equação de ondas na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t - A\mathbf{U} = 0 \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \end{aligned}$$

e identifique o operador A.

Referências

A. Pazy; *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Diffferential Equations.* Springer, New York,(1983).

C. A. Raposo; *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos.* SBMAC, São Carlos, (2007).

Aula 2 - A Equação de Ondas

Objetivo

Aplicar a teoria de Semigrupos para obter a solução de sistemas governados por Equações Diferenciais Parciais.

Introdução

Nesta seção iremos considerar uma equação de ondas com dissipação provocada pelo atrito representado por αu_t onde α é uma constante real positiva.

Neste sentido, estudaremos a existência, unicidade de solução para o modelo que descreve as pequenas vibrações verticais de uma corda elástica de comprimento finito L e presa nas extremidades.

Representamos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal de cada ponto $x \in (0,L)$ da corda no instante $t \geq 0$, a partir de sua posição de equilíbrio. Neste sentido temos o seguinte modelo dissipativo:

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0, \;\; (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \tag{12}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in (0,L), \tag{13}$$
$$u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in (0,L), \tag{14}$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \;\; t \geq 0. \tag{15}$$

Existência de Solução

Nesta seção, iremos mostrar que o modelo (41)–(44) possui uma única solução $u(x,t)$ na classe

$$u \in C^0\left((0,\infty), H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\right) \cap C^1\left((0,\infty), H^2(0,L)\right) \cap C^2\left((0,\infty), L^2(0,L)\right).$$

Inicialmente vamos escrever o nosso modelo da forma

$$\mathbf{U}_t - A\mathbf{U} = 0 \tag{16}$$
$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \tag{17}$$

onde A é o gerador infinitesimal do $\mathcal{C}_0$ - semigrupo associado a (41)–(44). Denotando $v = u_t$ e

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

podemos escrever

$$\mathbf{U}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\mathbf{U}.$$

Sejam $H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$ e $D(A) = [H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)] \times H_0^1(0,L)$. Vamos agora definir em H o seguinte produto interno:

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_H &= \left(\begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \\ &= \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} - \alpha v^2) dx \\ &= \int_0^L v_x u_x dx + \int_0^L (u_{xx} - \alpha v) v dx \ . \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno, obemos:

$$\langle AU, U \rangle_H = \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} v - \alpha v^2) dx = -\alpha \int_0^L |v|^2 dx, \tag{18}$$

donde segue que $Re\, \langle AU, U \rangle_H \leq 0$, e portanto, A é dissipativo.

Vamos mostrar agora que A é maximal.

Dado $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$, existe uma única $U \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$, tal que $U - AU = F$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

queremos mostrar que $U \in D(A) = (H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \times L^2(0,L)$. Temos:

$$\begin{aligned} &u - v = f_1 \\ &v - u_{xx} + \alpha v = f_2 \ . \end{aligned}$$

Somando, obtemos:

$$u - u_{xx} + \alpha v = f_1 + f_2.$$

Mas,

$$f_1 \in H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L),$$

logo

$$f_1 + f_2 \in L^2(0,L).$$

Para o problema $u - u_{xx} + \alpha v = f_1 + f_2$, com $f_1 + f_2 \in L^2(0,L)$, sabemos que existe uma solução $u \in H_0^1(0,L)$ e por regularidade elíptica, $u \in H^2(0,L)$. Logo, temos que

$u \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$.

Utilizando $v = u - f_1$ e lembrando que $u,\ f_1 \in H_0^1(0,L)$, podemos afirmar que $v \in H_0^1(0,L)$.

Temos mostrado que:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \times H_0^1(0,L) = D(A),$$

e que,

$$U - AU = F, \quad \forall F \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L),$$

isto é:

$$(I - A)U = F,$$

donde segue, para $\lambda = 1$:

$$Im(\lambda I - A) = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) = H.$$

Podemos concluir que A é maximal e, pelo teorema de Lumer-Phillips, A é gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações $\{\mathbf{S}(t)\}$ e $U(t) = \mathbf{S}(t)U(0)$, solução do problema (45)-(46).

Unicidade e Regularidade da Solução

Da teoria de semigrupos, sabemos que U é solução única e que:

$$U \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), D(A)\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), X\ ),$$

$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), H_0^1 \times L^2\ ),$$

isto é:

$$u \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), H_0^1 \cap H^2\ ) \cap \mathcal{C}^2(\ (0,\infty), H_0^1\ ). \tag{19}$$

$$u_t \in \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), L^2\ ) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^2(\ (0,\infty), L^2\ ). \tag{20}$$

De (19) e (20), temos:

$$u \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), H_0^1(0,L)\ ) \cap \mathcal{C}^2(\ (0,\infty), L^2(0,L)\ ).$$

Atividade

Utilizando a técnica de Semigrupos obtenha a solução do sistema Termoelástico definido no espaço de energia

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

onde $\Omega = (0, L)$, a, k, c_0 constantes positivas e α uma constantes não nula.

$$\begin{aligned}
u_{tt} - au_{xx} + \alpha\theta_x &= 0, \text{ em } (\Omega) \times (0, \infty), \\
c_0\theta_t - k\theta_{xx} + \alpha u_{xt} &= 0, \text{ em } (\Omega) \times (0, \infty) \\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ t > 0 \\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x), \ x \in (\Omega), \\
u_t(x,0) &= u_1(x), \ x \in (\Omega), \\
\theta(x,0) &= \theta_0(x), \ x \in (\Omega).
\end{aligned}$$

Referências

C. A. Raposo; *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos.* SBMAC, São Carlos, (2007).

J. E. M. Rivera; *Tópicos em Termoelaticidade e viscoelasticidade.* Monografias do LNCC. Série: Estudos Avançados, Brasil, (1998).

Unidade IV

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Aula 1 - Lema de Komornik-Haraux

Objetivo

Provar o decaimento exponencial da equação de ondas com amortecimento fricicional utilizando o Lema de Haraux-Komornik.

Introdução

Vamos retomar o modelo que descreve as pequenas vibrações verticais de uma corda delgada de comprimento finito L, fixa nas extremidades, onde $u = u(x,t)$ é a posição da corda no ponto $x \in (0, L) = \Omega$ no instante $t > 0$.

$$\begin{aligned} u_{tt} - k\, u_{xx} &= 0, \quad x \in \ \Omega, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0. \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ u_t(x,0) &= u_1(x). \end{aligned}$$

A solução obtida usando a técnica de semigrupos, com os dados iniciais $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ é denominada solução forte. Da teoria dos espaços de Sobolev, estes espaços estão imersos no espaço das funções contínuas.

Conhecendo a solução denotamos a energia total do modelo por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} |u_t|^2 \, dx + \frac{k}{2} \int_\Omega |u_x|^2 \, dx,$$

onde a primeira parcela é a energia cinética e a segunda parcela é a energia potencial.

Multiplicando a equação de ondas por u_t e integrando em Ω obtemos que a energia total de deste modelo é conservada, isto é

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = E(0) \ \text{ para todo } \ t > 0.$$

Acontece que em situações da vida real, a corda deixa de vibrar por vários motivos, tais como, o atrito, a resistência do material, a diferença de temperatura entre a corda e o meio ambiente, a viscosidade, etc.

Agora estamos interessado no modelo com atrito, cuja formalização segue abaixo.

$$\begin{aligned} u_{tt} - k\, u_{xx} + \alpha\, u_t &= 0, \quad x \in \ \Omega,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0. \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ u_t(x,0) &= u_1(x). \end{aligned}$$

Multiplicando a equação de ondas com dissipação por u_t e integrando em Ω observamos que agora a energia total é negativa, isto é

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \int_\Omega |u_t|^2\, dx.$$

Estamos interessados determinar a taxa de decrescimento da energia.

Para este modelo dissipativo iremos provar que a estabilidade é exponencial.

Do ponto de vista matemático provar a estabilidade exponencial é equivalente a estabelecer a seguinte desigualdade

$$E(t) \le C\, E(0)\, e^{-w\,t}$$

onde C e w são constantes reais, positivas e independentes dos dados iniciais.

Lema de Haraux-Komornik

Nesta seção vamos provar o teorema abaixo, que é uma versão simplificada do resultado mais geral obtido por A. Haraux e V. Komornik.

Teorema 6

$$\int_s^\infty E(t)\, dt \le c\, E(s) \ \ \textit{para todo} \ \ s > 0 \ \Rightarrow \ E(t) \le C\, E(0) e^{-w\,t}.$$

Demonstração: Considere

$$G(s) = \int_s^\infty E(t)\, dt,$$

Como $E(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, temos que $G(s) \le c\, E(s)$ e $G'(s) = -E(s)$. Temos então

$$c\, G'(s) + G(s) \le 0,$$

$$G'(s) + w\, G(s) \le 0 \ \text{ com } \ w = \frac{1}{c}.$$

Agora utilizando o fator integrante e^{ws} obtemos

$$G(s) \leq G(0)e^{-w\,s}.$$

Como $G(s) \geq E(s+1)$ temos

$$E(s+1) \leq G(0)e^{-w\,s}$$

e fazendo $s+1=t$ segue o resultado. $\square$

Decaimento Exponencial

Considere então o modelo

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\, u_t &= 0, \quad x \in \Omega, \; t > 0, & (21)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0. & (22)\\ u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) & (23)\\ u_t(x,0) &= u_1(x) \in H_0^1(\Omega). & (24) \end{aligned}$$

Multiplicando (30) por u_t e integrando por partes em Ω obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \int_\Omega |u_t|^2\,dx. \tag{25}$$

Agora multiplicando (30) por u e integrando por partes obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u\,dx - \int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega |u_x|^2\,dx + \alpha \int_\Omega u_t u\,dx = 0$$

Integrando em (s,t) temos

$$\int_\Omega [u_t u]|_s^t\,dx - \int_s^t \int_\Omega |u_t|^2\,dx\,dt + \int_s^t \int_\Omega |u_x|^2\,dx\,dt + \alpha \int_s^t \int_\Omega u_t u\,dx\,dt = 0$$

de onde segue que

$$\int_s^t E(t)\,dt \leq \left| \int_\Omega u_t u \|_s^t\,dx \right| + 2\int_s^t \int_\Omega |u_t|^2\,dx\,dt + \left| \alpha \int_s^t \int_\Omega u_t u\,dx\,dt \right| \tag{26}$$

Utilizando as desigualdade de Schwartz e a desigualdade de Poincarè temos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u_t u\,dx \right| &\leq c\left(\int_\Omega |u_t|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega |u|^2\,dx \\ &\leq \int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega |u_x|^2\,dx = E(t), \end{aligned}$$

de onde segue

$$\left| \int_\Omega u_t u \, dx \right| \leq E(s). \tag{27}$$

e então

$$\left| \int_\Omega [u_t u] |_s^t \, dx \right| \leq cE(t) + cE(s) \leq 2cE(s). \tag{28}$$

Utilizando (25) temos

$$\alpha \int_s^t \int_\Omega |u_t|^2 \, dx \, dt = E(s) - E(t) \leq E(s). \tag{29}$$

Por fin, utilizando (27), (28) e (29) em (26) concluimos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_s^t E(t) \, dt \leq C \, E(s) \ \text{ para todo } \ s, t > 0$$

e pelo Lema de Haraux-Komornik, existe $c > 0$ e $w > 0$ tal que

$$E(t) \leq c \, E(0) e^{-w \, t} \ \text{ para todo } \ t > 0.$$

Atividade

Utilizando o resultado de Haraux-Komornik, prove o decaimento exponencial do seguinte modelo dissipativo

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} + \alpha\, u_{xxt} &= 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, &(30)\\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0. &(31)\\
u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) &(32)\\
u_t(x,0) &= u_1(x) \in H_0^1(\Omega). &(33)
\end{aligned}
$$

Referências

A. Haraux; *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs nonlinéaires.* Publications du Laboratoire d'Analyse Numèrique, Universitè Pierre et Marie Curie, Paris, N° 78010, (1978).

V. Komornik; *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* RAM, Masson & John Wiley, Paris, (1994).

Aula 2 - Método de Energia

Objetivo

Provar o decaimento exponencial da equação de ondas com amortecimento fricicional utilizando o Método de Energia.

Introdução

Vamos agora apresentar outro método para o estudo do comportamento assintótico.

Nossa meta sera obter um funcional denotado por $\mathcal{L}(t)$ denominado de funcional de Lyapunov.

O funcional de Lyapunov possui duas propriedades fundamentais:

(1) - $\mathcal{L}(t)$ é equivalente ao funcional de energia $E(t)$, isto é, existem constantes reais e positivas c_0 e c_1 tais que

$$c_0\, E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1\, E(t)$$

(2) - $\mathcal{L}(t)$ recupera com valores negativo, a energia total do sistema, isto é,

$$\frac{d\,\mathcal{L}(t)}{dt} \leq -C\, E(t).$$

Agora observe que as condições do funcional de Lyapunov são suficientes para estabelecer o decaimento exponencial da energia total do sistema, pois teremos

$$\frac{d\,\mathcal{L}(t)}{dt} \leq -c_1\, \mathcal{L}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(t) \leq c\, e^{-w\,t}$$

e então

$$c_0\, E(t) \leq \mathcal{L}(t) \quad \Rightarrow \quad E(t) \leq C\, e^{-w\,t}.$$

Para construir o funcional de Lyapunov utilizaremos adequados multiplicadores e denomonamos o procedimento de Método de Energia.

Método de Energia

Considere então o modelo

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\, u_t &= 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, && (34)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0. && (35)\\ u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) && (36)\\ u_t(x,0) &= u_1(x) \in H_0^1(\Omega). && (37) \end{aligned}$$

Multiplicando (34) por u_t e integrando por partes em Ω obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \int_\Omega |u_t|^2 \, dx. \tag{38}$$

Agora multiplicando (34) por u e integrando por partes obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [u_t u + \frac{\alpha}{2}|u|^2] \, dx = \int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \int_\Omega |u_x|^2 \, dx$$

Denotando

$$\mathcal{L}_1(t) = \int_\Omega [u_t u + \frac{\alpha}{2}|u|^2] \, dx$$

temos que

$$\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(t) = \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u_x|^2 \, dx$$

Definindo o funcional de Lyapunov por

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\alpha}{2}\mathcal{L}_1(t) + E(t)$$

temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = (\alpha - \frac{\alpha}{2})\int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u_x|^2 \, dx$$

e portanto podemos concluir que

$$E(t) \leq C\, E(0)\, e^{-w\, t}.$$

Atividade

Utilizando o Método de Energia prove o decaimento exponencial do sistema termoelástico abaixo

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - au_{xx} + \alpha\theta_x &= 0, \text{ em } (\Omega) \times (0, \infty), \\
c_0\theta_t - k\theta_{xx} + \alpha u_{xt} &= 0, \text{ em } (\Omega) \times (0, \infty) \\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ t > 0 \\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\
u_t(x,0) &= u_1(x) \in H_0^1(\Omega), \\
\theta(x,0) &= \theta_0 \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Referências

J. E. M. Rivera Haraux; *Tópicos em Termoelaticidade e viscoelasticidade.* Monografias do LNCC. Série: Estudos Avançados, Brasil, (2000).

V. Kormonik & E. Zuazua; *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation.* J. Math, Pures Appl. 69(1), 33-54 (1990).

Aula 3 - Método de Semigrupos

Objetivo

Obter a estabilidade exponencial do semigrupo gerado por um sistema dissipativo.

Introdução

No estudo do decaimento exponencial de um modelo dissipativo governado por equações diferenciais parciais, conforme vimos, o problema central é estabelecer uma estimativa para a energia total do sistema, $E(t)$, da forma

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

ou, equivalentemente, estabelecer a estabilidade exponencial

$$\|S(t)\| \leq Ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

do Semigrupo dissipativo $S(t)$ gerado pelo sistema.

Por muito tempo permaneceu em aberto a relação entre estas duas estimativas, entretanto, hoje é conhecido que elas são equivalentes.

Neste sentido, iremos provar o decaimento exponencial explorando as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema e para isto utlizaremos o seguinte Teorema devido a Geahart

Teorema 7 *Seja* $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ *um* $\mathcal{C}_0$*-semigrupo de contrações em um Espaço de Hilbert. Então* $\mathbf{S}(t)$ *é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{39}$$

$$||(\lambda\, I - A)^{-1}|| \leq C, \ \forall \ \lambda \in i\,\mathbb{R}. \tag{40}$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na referência no final deste capítulo.

O Método

A essência do método consiste em supor por contradição que as hipóteses do Teoremas de Gearhart são falsas.

Trabalharemos em duas etapas, as quais, em linhas gerais apresentamos a seguir.

Na primeira etapa, ao supormos que a condição (39) é falsa, teremos a seguinte inclusão

$$\{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(A)$$

onde $\sigma(A)$ é o espectro do operador A.

Estaremos utilizando adequados espaços de Hilbert, e da teoria geral dos espaços de Sobolev.

Iremos obter imersões compactas o que garantirá, via teoria espectral, que $\sigma(A)$ é constituído apenas de autovalores de A.

Em seguida utilizando adequados multiplicadores e técnicas conhecidas do estudo de EDP, iremos gerar uma contradição. Deste modo provaremos a primeira condição do teorema de Gearhart.

Na segunda etapa, quando supomos que (40) é falsa, obtemos a seguinte informação

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| = \infty$$

o que nos permite obter uma sequencia de vetores

$$U_n \in D(A) \text{ satisfazendo } ||U_n|| = 1.$$

Neste momento usamos o fato do operador A ser dissipativo e após um raciocínio razoável de análise matemática, conseguimos obter uma contradição sobre a sequência de vetores U_n.

Deste modo provaremos a segunda codição do teorema de Gearhart e por consequencia a estabilidade exponencial do modelo em questão. do Semigrupo dissipativo $\mathbf{S}(t)$ gerado pelo sistema.

Estabilidade Exponencial

Consideremos o seguinte modelo dissipativo

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0, \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \tag{41}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in (0,L), \tag{42}$$
$$u_t(x,0) = u_1(x), \ \ x \in (0,L), \tag{43}$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \ t \geq 0. \tag{44}$$

Já sabemos que este modelo (41)–(44) possui uma única solução $u(x,t)$ na classe

$$C^0\left((0,\infty), H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\right)\right) \cap C^1\left((0,\infty), H^2(0,L)\right)\right) \cap C^2\left((0,\infty), L^2(0,L)\right)\right).$$

Para obter esta regularidade basta escrever o modelo na forma

$$\mathbf{U}_t - A\mathbf{U} = 0 \tag{45}$$
$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \tag{46}$$

onde A é o gerador infinitesimal do $\mathcal{C}_0$ - semigrupo associado a (41)–(44).

Neste contexto trabalhamos com o seguinte espaço funcional

$$H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$$

e o domínio do operador definido por

$$D(A) = [H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)] \times H_0^1(0,L).$$

Em H definimos o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_H &= \left(\begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \\ &= \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} - \alpha v^2) dx \\ &= \int_0^L v_x u_x dx + \int_0^L (u_{xx} - \alpha v) v dx \ . \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno, obemos

$$\langle AU, U \rangle_H = \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} v - \alpha v^2) dx = -\alpha \int_0^L |v|^2 dx, \tag{47}$$

donde segue que $Re\, \langle AU, U \rangle_H \leq 0$, e portanto, A é dissipativo.

O principal resultado desta seção é o seguinte

Teorema 8 *O C_0-semigrupo de contrações $(\mathbf{S}(t) = e^{At})_{t>0}$,gerado pelo operador A, é exponencialmente estável, i. e., existe constantes positivas M e w tais que*

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{-wt}.$$

Demonstração: Dados $u_t = v$ e $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, temos que:

$$U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = AU \ ,$$

donde segue que $U_t - AU = 0$ e, portanto,:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha I \ . \end{bmatrix}$$

Definindo $H = H_0^1 \times L^2$ e $D(A) = (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1$ e lembrando que A é dissipativo, vamos verificar que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$$

e

$$||(\lambda\, I - A)^{-1}|| \leq C, \ \forall \ \lambda \in i\,\mathbb{R}.$$

Faremos a prova por contradição. Sabemos que para $F \in H$ existe uma única solução $U \in H$ tal $AU = F$, e por regularidade elíptica $U \in D(A)$ e satisfaz $||U||_H \leq K||F||_H$ com K uma constante positiva. Logo $0 \in \rho(A)$.

Segue do fato que $0 \in \rho(A)$ e do teorema de contração que para qualquer número $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \leq ||A^{-1}||^{-1}$, o operador $(i\beta I - A) = A(i\beta A^{-1} - I)$ é inversível e além disto $||(i\beta I - A)^{-1}||$ é uma função contínua de β em $(-||A^{-1}||^{-1}, ||A^{-1}||^{-1})$.

Vamos então usar o argumento de contradição. Primeiro vamos supor que

$$\{i\,\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A)$$

não é verdade. Entãon, existe $w \in \mathbb{R}$ com $||A^{-1}||^{-1} \leq w < \infty$ tal que $\{i\,\beta : |\beta| < |w|\} \subset \rho(A)$ e o $Sup\{||(i\,\beta - A)^{-1}|| : |\beta| < |w|\} = \infty$.

Então, existe $(\beta_n) \in \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$, $|\beta_n| < |w|$ e uma sequência de funções vetoriais complexas $U_n \in D(A)$ tal que $||U_n|| = 1$ in $\mathcal{H}$ e

$$||(i\,\beta_n - A)U_n|| \to 0.$$

Fazendo o produto interno de $(i\,\beta_n - A)U_n$ com U_n obtemos

$$i\,\beta_n||U_n||^2 - \langle AU_n, U_n\rangle \to 0.$$

Agora, usando (47) temos que

$$i\,\beta_n||U_n||^2 + \gamma\int_0^{L_0} |v_{n,x}^1|^2\,dx \to 0. \tag{48}$$

Tomando a parte real obtemos

$$\gamma\int_0^{L_0} |v_{n,x}^1|^2\,dx \to 0. \tag{49}$$

Usando (49) em (48) podemos afirmar que

$$i\,\beta_n||U_n||^2 \to 0. \tag{50}$$

Observando que $\beta_n \to w$, $|\beta_n| < |w|$ concluimos que $||U_n|| \to 0$ que é uma contradição com $||U_n|| = 1$.

Para concluir a prova vamos mostrar que

$$||(\lambda\, I - A)^{-1}|| \le C, \;\; \forall\; \lambda \in i\,\mathbb{R}.$$

Suponhamos que não é verdade. Logo existe uma sequência de funções vetoriais (V_n) tal que

$$||(i\,\beta_n - A)^{-1} V_n|| > n||V_n||. \tag{51}$$

Como $(V_n) \in H$ e $i\,\beta_n \in \rho(A)$, existe uma única sequência $U_n \in D(A)$ tal que

$$i\,\beta_n U_n - AU_n = V_n \quad \text{with} \quad ||U_n|| = 1.$$

Introduzindo $g_n = (i\,\beta_n - A)U_n$ e usando (51) obtemos

$$||g_n|| \le \frac{1}{n} \;\text{ and hence }\;\; g_n \to 0.$$

Fazendo o produto interno de g_n com U_n e usando (47) obtemos

$$i\,\beta_n||U_n||^2 + \gamma\int_0^{L_0} |v_{n,x}^1|^2\,dx = \langle g_n, U_n\rangle.$$

Agora, tomando a parte real e observando que (U_n) é limitada e que $g_n \to 0$ deduzimos

$$\gamma\int_0^{L_0} |v_{n,x}^1|^2\,dx \to 0.$$

Procedendo com no caso anterior $||U_n|| \to 0$ o que uma contradição. Isto completa a prova. $\square$

Atividade

Considere o sistema viscoelástico, isto é, sonsidere os pequenos deslocamento transversais de uma corda elástica, de comprimento finito L, o qual denotamos por $u(x,t)$, onde $x \in (0,L)$ é o deslocamento horizontal da corda em cada instante $t > 0$. Suponha que o "stress" σ é do tipo taxa, i. e.,

$$\sigma = \alpha u_x + \gamma u_{xt} \ ,$$

então, a equação de onda é escrita do seguinte modo

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \gamma u_{xxt} = 0, \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \ .$$

Vamos assumir que a corda está fixa nos seus pontos extremos, $x = 0$ e $x = L$. Neste caso temos as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \ . \end{aligned}$$

O espaço de energia associado a este modelo é $H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$.

O produto interno neste espaço é definido para $U_j = (u^j, v^j) \in H, \ j = 1,2$, do seguinte modo

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^L \alpha u_x^1 u_x^2 \, dx + \int_0^L v^1 v^2 \, dx.$$

Denotamos por $\|U\|^2 = \langle U, U \rangle$, a norma no espaço de energia.

Utilizando o método de semigrupos, prove a estabilidade exponencial da solução deste modelo dissipativo.

Referências

C. A. Raposo; *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos.* SBMAC, São Carlos, (2007).

Z. Liy & S. Zheng; *Semigroupos Associated with Dissipative Systems.* Chapman & Hall / CRC, Londo, (1999).

PRA FINAL DE CONVERSA...

Esperamos que esta apostila lhe tenha sido proveitosa e agradável. Procuramos escrevê-la da melhor maneira possível, com muito carinho e com o objetivo de facilitar o seu entendimento, sem perder a qualidade. Tratamos aqui de assuntos essenciais para sua formação acadêmica. Desejamos que você prossiga com seus estudos, que obtenha êxito e paixão para continuar sempre!

Atenciosamente,

Os Autores.

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

nead
Núcleo de Educação a Distância