



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA (FACET)
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA/BAIXO TOCANTINS

Simpósio em comemoração aos 30 anos do curso de Matemática

24 a 27 de outubro de 2017

MÉTODO DE ENERGIA APLICADO A SISTEMAS DISSIPATIVOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

*

CARLOS ALBERTO RAPOSO DA CUNHA †

* *Código de classificação matemática:* 35L05, 35B40, 35L25, 35L15

Palavras-chave: Equação de ondas, método de Faedo-Galerkin, sistema dissipativo, vigas laminadas, estabilidade de solução.

†UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei, Brasil, raposo@ufs.edu.br,
www.carlosraposo.com.br

Sumário

1	Introdução	3
2	Objetivo	4
3	Metodologia	4
4	O Método de Faedo-Galerkin	6
4.1	O problema aproximado	6
4.2	Estimativas a priori	7
4.3	Passagem ao limite	8
4.4	Unicidade de solução	10
5	O Método de Energia	11
6	Vigas Laminadas	13
6.1	Aspectos históricos	13
6.2	Vantagens de usar vigas laminadas de madeira	13
6.3	Estabilidade exponencial	15
6.3.1	Energia do sistema	15
6.3.2	Lemas técnicos	17
6.3.3	Estabilidade exponencial	19

1 Introdução

O estudo das Equações Diferenciais começa com a criação do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII e é guiado, inicialmente, por suas aplicações à mecânica das partículas. Nessas aplicações, o uso de leis físicas, como as três leis de Newton da Dinâmica e a lei da gravitação universal, possibilitam obter Equações Diferenciais Ordinárias que representam os fenômenos em estudo.

O sucesso em tratar esses problemas utilizando o Cálculo foi um enorme estímulo aos físicos e matemáticos do século seguinte em procurar modelos para problemas da Mecânica do Contínuo e de outros ramos da Física (Termologia, por exemplo) que expressem fenômenos em termos de Equações Diferenciais.

Entretanto as equações resultantes, sendo Equações Diferenciais Parciais, traziam sérias dificuldades em sua resolução.

Dois problemas básicos que aparecem no estudo dos matemáticos do século XVIII são as seguintes:

(1) No problema da condução do calor em uma barra, a temperatura $u(x, t)$ do ponto x da barra, no instante t , deve satisfazer à equação do calor

$$u_t - k u_{xx} = 0.$$

(2) No problema das vibrações transversais de uma corda, a posição $u(x, t)$ de um ponto x da corda, num instante t , deve satisfazer à equação de ondas

$$u_{tt} - k u_{xx} = 0.$$

Para os problemas (1) e (2), k é uma constante real positiva. A obtenção de soluções satisfazendo, além da equação diferencial, a certas condições iniciais e condições de fronteira é uma tarefa difícil.

Para o estudo da existência de solução destes problemas os métodos analíticos foram surgindo por adaptação de uma idéia original de Fourier (1822), que consistiu na técnica de separação de variáveis para obter problemas de autovalor, para as Equações Diferenciais Ordinárias, estreitamente relacionadas com as Equações Diferenciais Parciais em questão. Em (1908) tivemos o método de Ritz para problemas variacionais e como generalização deste tivemos o método de Galerkin (1908). Explorando a idéia original de Fourier, Sandro Faedo (1945) aprimorou o método de Galerkin e desenvolveu um método conhecido atualmente como método de Faedo-Galerkin para a resolução de problemas de evolução.

Neste contexto duas questões surgem naturalmente na resolução de problemas governados por Equações Diferenciais Parciais: A existência da solução e a estabilidade da solução. Neste minicurso estudaremos estas duas questões.

É portanto, de fundamental importância o futuro matemático dominar o método de Faedo-Galerkin, atualmente o mais utilizado para resolução analítica de Equações Diferenciais Parciais e em relação a estabilidade, dominar o Método de Energia, utilizado para fazer a análise do comportamento assintótico da solução obtida.

O ambiente natural para buscar a solução de Equações Diferenciais Parciais é o Espaço de Sobolev cuja referência bibliográfica clássica é R. A. Adams [1]. Com relação ao comportamento assintótico da solução a bibliografia está diretamente relacionada com o tipo de mecanismo dissipativo introduzido para a estabilização do sistema. Neste minicurso limitaremos o estudo ao “damping” friccional.

Cabe informar que utilizaremos uma bibliografia mais recente o que permitirá ao aluno uma análise comparativa da evolução da linguagem e das técnicas aprimoradas nos últimos anos.

2 Objetivo

Nossos objetivos:

- Apresentar o método de Faedo-Galerkin e o Método de Energia.
- Estudar o comportamento assintótico para ondas com amortecimento friccional.
- Provar a estabilidade exponencial do modelo de vigas laminadas.

3 Metodologia

Denotamos por

$$L^2(0, L) = \left\{ u : (0, L) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^L |u|^2 dx \leq C \right\}$$

e introduzimos os seguintes espaços de Sobolev, que faremos uso ao longo do texto.

$$\begin{aligned} H^1(0, L) &= \{ u \in L^2(0, L) \mid \text{tal que } u_x \in L^2(0, L) \}, \\ H_0^1(0, L) &= \{ u \in H^1(0, L) \mid \text{tal que } u(0) = u(L) = 0 \}, \\ H^2(0, L) &= \{ u \in L^2(0, L) \mid \text{tal que } u_x \in L^2(0, L) \text{ e } u_{xx} \in L^2(0, L) \}. \end{aligned}$$

Inicialmente iremos considerar as pequenas vibrações verticais de uma corda delgada de comprimento finito L , fixa nas extremidades. Vamos denotar por $u = u(x, t)$ a posição da corda no ponto $x \in (0, L)$ no instante $t > 0$. Nesta condição temos o seguinte modelo conhecido como equação da onda.

$$\begin{aligned} u_{tt} - k u_{xx} &= 0, & x \in (0, L), & t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Os dados iniciais do problema (3.1) serão escolhidos nos espaços de Sobolev conforme indicado abaixo

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \in H_0^1(0, L) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \in L^2(0, L). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Em seguida iremos obter a solução de (3.1)-(3.2) através do Método de Faedo-Galerkin, o qual consiste em obter a solução do problema aproximado em um espaço de dimensão finita e usando resultados de imersões dos espaços de Sobolev, gerar condições para passagem ao limite e consequentemente obter a solução do problema no espaço onde estão localizados os dados iniciais.

Esta solução com os dados iniciais em H_0^1 e L^2 é denominada solução fraca enquanto que a solução com os dados iniciais $u_0 \in H_0^1 \cap H^2$ e $u_1 \in H_0^1$ é denominada solução forte.

Conhecendo a solução denotamos a energia total do modelo por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx,$$

onde a primeira parcela é a energia cinética e a segunda parcela é a energia potencial.

É fácil verificar que a energia total de (3.1)-(3.2) é conservativa, isto é

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0.$$

Acontece que em situações da vida real, a corda após ser posta em movimento, deixa de vibrar por vários motivos, tais como, o atrito, a resistência do material, a diferença de temperatura entre a corda e o meio ambiente, a viscosidade, etc. Estaremos abordando o modelo com atrito, cuja formalização segue abaixo.

$$\begin{aligned} u_{tt} - k u_{xx} + \alpha u_t &= 0, & x \in (0, L), & t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x). \end{aligned}$$

Neste momento utilizando adequados multiplicadores, via o Método de Energia construiremos um funcional de Lyapunov, que é um funcional equivalente ao funcional de Energia e que decai exponencialmente.

Com o funcional de Lyapunov iremos provar a estabilidade exponencial do modelo dissipativo (3.3). Do ponto de vista matemático iremos provar a seguinte desigualdade

$$E(t) \leq C E(0) e^{-wt}$$

onde C e w são constantes reais, positivas e independentes dos dados iniciais.

4 O Método de Faedo-Galerkin

Inicialmente vamos dizer o que entendemos por solução fraca para o modelo

$$\begin{aligned} u_{tt} - k u_{xx} &= 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \in H_0^1 \\ u_t(x, 0) &= u_1 \in L^2 \end{aligned}$$

Definição 4.1. Dizemos que $u : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fraca para (4.1) quando

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t \phi dx + k \int_0^L u_x \phi_x dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(0, L)$$

e a indentidade é no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

Vamos provar a existência e unicidade de solução para (4.1) utilizando o método de Faedo-Galerkin.

4.1 O problema aproximado

Considere $\{w_1, w_2, \dots, w_m, \dots\}$ uma base de $H_0^1(0, L)$. Como H_0^1 é um espaço de Hilbert, podemos utilizar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e sem perda de generalidade, podemos supor que esta base é ortonormal.

Seja $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ o espaço vetorial finito gerado pelos m -primeiros vetores da base de tal forma que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = H_0^1.$$

O problema aproximado consiste em encontrar $u^m \in L^\infty(0, T, V_m)$ tal que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t^m \phi dx + k \int_0^L u_x^m \phi_x dx = 0 \quad \forall \phi \in V_m \tag{4.2}$$

e além disto

$$\begin{aligned} u^m(x, 0) &= u_0^m \rightarrow u_0 \quad \text{em } H_0^1 \\ u_t^m(x, 0) &= u_1^m \rightarrow u_1 \quad \text{em } L^2 \end{aligned}$$

onde

$$u^m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j(x).$$

Fazendo $\phi = w_i \in V_m$ em (4.2) obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t^m w_i dx + k \int_0^L u_x^m w_{i,x} dx = 0 \quad \text{em } V_m$$

isto é

$$\int_0^L u_{tt}^m w_i dx + k \int_0^L u_x^m w_{i,x} dx = 0 \quad \text{em } V_m$$

de onde segue

$$\sum_{j=1}^m \int_0^L g_{jm}''(t) w_j w_i dx + k \sum_{j=1}^m \int_0^L g_{jm}(t) w_{j,x} w_{i,x} dx = 0 \quad \text{em } V_m.$$

Sendo a integral em $(0, L)$ temos

$$\sum_{j=1}^m g_{jm}''(t) \int_0^L w_j w_i dx + k \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \int_0^L w_{j,x} w_{i,x} dx = 0 \quad \text{em } V_m.$$

Agora definimos

$$A^m = k \sum_{j=1}^m \int_0^L w_{j,x} w_{i,x} dx$$

e usando as propriedades da base ortonormal obtemos

$$g_{jm}''(t) + A^m g_{jm}(t) = 0,$$

que é um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª ordem, que admite solução única em $(0, T)$, $T > 0$ para dados iniciais fixados.

4.2 Estimativas a priori

Vamos agora obter as estimativas que nos possibilite a passagem ao limite no problema aproximado.

Fazendo $\phi = w_j$ e multiplicando a equação aproximada (4.2) por $g'_{jm}(t)$ obtemos

$$\int_0^L u_{tt}^m g'_{jm}(t) w_i dx + k \int_0^L u_x^m g'_{jm}(t) w_{i,x} dx = 0 \quad \text{em } V_m,$$

aplicando o somatório temos

$$\int_0^L u_{tt}^m \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) w_i dx + k \int_0^L u_x^m \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) w_{i,x} dx = 0 \quad \text{em } V_m,$$

de onde segue

$$\int_0^L u_{tt}^m u_t^m dx + k \int_0^L u_x^m u_{xt}^m dx = 0 \quad \text{em } V_m,$$

que pode ser descrito do seguinte modo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t^m|^2 dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x^m|^2 dx = 0 \quad \text{em } V_m.$$

Agora integramos em $(0, T)$, $T > 0$ e obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^L |u_t^m|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_x^m|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L |u_1^m|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_{0,x}^m|^2 dx \quad \text{em } V_m.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} u_0^m &\rightarrow u_0 \quad \text{em } H_0^1 \\ u_1^m &\rightarrow u_1 \quad \text{em } L^2 \end{aligned}$$

e que $V_m \subset H_0^1 \subset L^2$ temos que

$$\frac{1}{2} \int_0^L |u_t^m|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_x^m|^2 dx \leq C. \quad (4.3)$$

Temos então que

$$\begin{aligned} u_t^m &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2) \\ u_x^m &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2) \end{aligned}$$

logo existe uma subsequência de u^m , que continuaremos denotando do mesmo modo, tal que

$$u_t^m \rightarrow u_t \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2) \quad (4.4)$$

$$u_x^m \rightarrow u_x \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2) \quad (4.5)$$

4.3 Passagem ao limite

Da equação (4.2) temos

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t^m w dx + k \int_0^L u_x^m w_x dx = 0 \quad \forall w \in V_m.$$

Multiplicando por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando em $(0, T)$ obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^m w \, dx \, \theta \, dt + k \int_0^T \int_0^L u_x^m w_x \, dx \, \theta \, dt = 0 \quad \forall w \in V_m.$$

Integrando por partes obtemos

$$- \int_0^T \int_0^L u_t^m w \, dx \, \theta' \, dt + k \int_0^T \int_0^L u_x^m w_x \, dx \, \theta \, dt = 0 \quad \forall w \in V_m.$$

Agora passando ao limite $m \rightarrow \infty$ e utilizando as convergências (4.4) e (4.5) temos

$$- \int_0^T \int_0^L u_t w \, dx \, \theta' \, dt + k \int_0^T \int_0^L u_x w_x \, dx \, \theta \, dt = 0 \quad \forall w \in H_0^1.$$

Integrando novamente por partes

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^L u_t w \, dx \, \theta \, dt + k \int_0^T \int_0^L u_x w_x \, dx \, \theta \, dt = 0 \quad \forall w \in H_0^1.$$

Logo podemos escrever

$$\left\langle \frac{d}{dt} \int_0^L u_t w \, dx \, \theta \, dt + k \int_0^L u_x w_x \, dx \, \theta \, dt, \theta \right\rangle = 0$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathcal{D}(0, T)$.

Podemos afirmar que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t w \, dx + k \int_0^L u_x w_x \, dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1 \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T).$$

o que prova a existência de solução fraca.

Observação 4.1. *Note que para a obtenção de solução fraca provamos*

$$\frac{1}{2} \int_0^L |u_t^m|^2 \, dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_x^m|^2 \, dx \leq C,$$

isto é, provamos que a energia de primeira ordem é limitada.

Agora vamos definir solução forte. Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - k u_{xx} &= 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ u_t(x, 0) &= u_1 \in H_0^1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definição 4.2. Dizemos que $u : (0, L) \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma solução forte para (4.6) quando

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_{tt} \phi \, dx + k \int_0^L u_{tx} \phi_x \, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$$

e a indentidade é no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

Observação 4.2. Para provamos a existência de solução forte, derivamos a solução aproximada em relação a variável tempo e procedimos de maneira análoga ao caso de solução fraca para obtemos uma limitação para a energia de segunda ordem, do tipo abaixo

$$\frac{1}{2} \int_0^L |u_{tt}^m|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_{tx}^m|^2 \, dx \leq C,$$

com esta limitação podemos obter as convergências necessárias para passagem ao limite na equação aproximada.

4.4 Unicidade de solução

Vamos supor que exista duas soluções u e v nas seguintes condições:

$$\begin{aligned} u_{tt} - k u_{xx} &= 0, & x \in (0, L), & t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ u_t(x, 0) &= u_1 \in H_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{tt} - k v_{xx} &= 0, & x \in (0, L), & t > 0, \\ v(0, t) = v(L, t) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u_0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ v_t(x, 0) &= u_1 \in H_0^1. \end{aligned}$$

Definimos $z = u - v$ e obtemos de (4.7) e (4.8) o seguinte problema

$$\begin{aligned} z_{tt} - k z_{xx} &= 0, & x \in (0, L), & t > 0, \\ z(0, t) = z(L, t) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= 0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ z_t(x, 0) &= 0 \in H_0^1. \end{aligned}$$

Multiplicando (4.9) por z_t , integrando por parte e usando a hipótese que os dados iniciais são nulos, temos que

$$\frac{1}{2} \int_0^L |z_t|^2 \, dx + \frac{k}{2} \int_0^L |z_x|^2 \, dx = 0,$$

de onde segue diretamente da desigualdade de Poincar'e que $z = 0$ e portanto $u = v$.

5 O Método de Energia

Nesta seção iremos considerar a equação de ondas com amortecimento friccional e iremos provar que a solução decai exponencialmente. Neste sentido consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} - k u_{xx} + \alpha u_t &= 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \in H_0^1(0, L). \end{aligned}$$

Inicialmente vamos mostrar que este modelo é dissipativo.

Multiplicando a equação de ondas dissipativas por u_t e integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx - k \int_0^L u_{xx} u_t dx + \alpha \int_0^L |u_t|^2 dx = 0.$$

Integrando por partes e utilizando as condições de contorno obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{k}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx = -\alpha \int_0^L |u_t|^2 dx,$$

isto é

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha \int_0^L |u_t|^2 dx, \tag{5.2}$$

de onde segue que a energia total é decrescente e portanto o sistema é dissipativo.

Agora note que na expressão (5.2) conseguimos recuperar parte da energia com o sinal negativo, isto é, apenas a energia cinética. Vamos agora recuperar o restante da energia, ou seja, vamos recuperar a energia potencial.

Neste sentido, multiplicando a equação de ondas dissipativas por u e integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L u_{tt} u dx - k \int_0^L u_{xx} u dx + \alpha \int_0^L u_t u dx = 0. \tag{5.3}$$

Note que

$$\frac{d}{dt} u_t u = u_{tt} u + |u_t|^2 \tag{5.4}$$

$$\frac{d}{dt} u_x u = u_{xx} u + |u_x|^2.$$

Agora integrando (5.3) por partes, utilizando as condições de contorno e também as identidades (5.4) obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^L u_t u \, dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L |u|^2 \, dx \right] = \int_0^L |u_t|^2 \, dx - k \int_0^L |u_x|^2 \, dx. \quad (5.5)$$

Agora definimos

$$E_1(t) = \int_0^L u_t u \, dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L |u|^2 \, dx$$

e de (5.2) e (5.5) obtemos para $\varepsilon > 0$

$$\frac{d}{dt} [E(t) + \varepsilon E_1(t)] = -(\alpha - \varepsilon) \int_0^L |u_t|^2 \, dx - k \varepsilon \int_0^L |u_x|^2 \, dx. \quad (5.6)$$

O funcional $\mathcal{L}(t) = E(t) + \varepsilon E_1(t)$ é denominado de funcional de Lyapunov. Por sua construção este funcional é equivalente ao funcional de energia $E(t)$, isto é, existem constantes positivas c_1 e c_2 tal que

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t). \quad (5.7)$$

Agora escolhendo

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$$

segue de (5.6) que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = -\alpha \left[\frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 \, dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_x|^2 \, dx \right].$$

Finalmente usando (5.7) na expressão anterior podemos concluir que

$$E(t) \leq C E(0) e^{-wt}, \quad \text{onde } C = \frac{1}{c_1} \quad \text{e } w = \frac{\alpha}{c_2}.$$

Vamos provar que o mesmo resultado sobre o decaimento exponencial vale para soluções fracas. Para isto, fixamos o dado inicial fraco, por densidade, consideremos uma sequência de dados fortes que converge na norma de $E(t)$, ao dado inicial fraco, isto é,

$$E(0, u^n) \rightarrow E(0, u) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Pelo resultado anterior temos

$$E(t, u^n) \leq C E(0, u^n) e^{-wt}$$

onde C e w não dependem dos dados iniciais. Agora usando a semi-continuidade fraca do funcional de energia temos que

$$\begin{aligned} E(t, u) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(t, u^n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} C E(0, u^n) e^{-wt} \\ &\leq C E(0, u) e^{-wt}. \end{aligned}$$

6 Vigas Laminadas

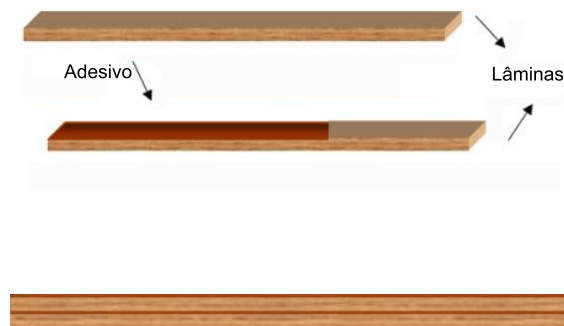
6.1 Aspectos históricos

Pelo que se tem conhecimento a sua aplicação concreta teve início no século XIX. Nesse período destacou-se o coronel Emy, na França, que fabricou vigas compostas por lâminas (tábuas) sobrepostas, mantidas unidas por pregos e cintas metálicas. No entanto, para dar origem à Madeira Laminada-Colada (MLC) empregada na fabricação de elementos estruturais a serem utilizados na construção civil, só foi possível, com o surgimento de colas de alta resistência. O Alemão Friedrich Otto Hetzer foi quem patenteou, em 1901, esse método de construção, que utilizava o adesivo caseína.

Em 1934, nos Estados Unidos, o alemão Max Hanisch projetou o edifício do Laboratório de Produtos Florestais – projeto que incluiu arcos e vigas laminadas – implementando a técnica da madeira colada; foram efetuados diversos ensaios não destrutivos em vigas e, posteriormente, ensaios destrutivos em arcos, com o objetivo de estudar a resistência mecânica. Tais ensaios foram determinantes na aceitação da madeira laminada para fins estruturais.

Em 1940, com o aparecimento das colas sintéticas que o sistema laminado-colado conheceu o seu grande progresso, passando a ser utilizado na construção de pontes e construções marinhas, que tinham necessidade de um alto grau de resistência e durabilidade.

6.2 Vantagens de usar vigas laminadas de madeira



- **Grandes envergaduras:** A madeira laminada colada se caracteriza por alta capacidade de carga e baixo peso próprio, permitindo assim a fabricação de componentes de pequenas dimensões e grandes envergaduras.
- **Formas livres:** A madeira laminada colada proporciona uma grande flexibilidade com curvaturas, arqueadas e dobradas em sua forma.
- **Número menor de ligações:** Em comparação com as estruturas de madeiras feitas com peças maciças, os elementos concebidos em madeira laminada colada

exigem um número bem menor de ligações, uma vez que são previstos para grandes dimensões.

- **Leveza:** A leveza das estruturas em madeira laminada colada oferece maior facilidade de montagem, desmontagem e possibilidade de ampliação. Além disso, com o peso “morto” sendo menor se comparado com outros materiais, como o concreto, pode-se economizar também nas fundações.
- **Resistência mecânica:** Para uma viga de madeira laminada colada e uma de aço, com a mesma massa, observa-se a mesma capacidade de resistência. Da mesma maneira, se for feita a comparação entre uma viga de madeira laminada colada e uma de concreto, com o mesmo volume, observa-se que as duas possuem o mesmo poder de resistência, sendo que neste caso a de madeira laminada colada fica aproximadamente cinco vezes mais leve que a de concreto.
- **Sustentabilidade:** No hemisfério norte a utilização da madeira de reflorestamento, basicamente formada por Pinus encontrado em abundância em países do hemisfério norte, teve nessa madeira de fácil trabalhabilidade, a sua grande aliada. No hemisfério sul a madeira laminada colada tem se mostrado uma alternativa promissora também para um melhor aproveitamento dos recursos florestais brasileiros. Atualmente, com o aumento da preocupação com a preservação do meio ambiente e as mudanças nas práticas de gestão florestal, a madeira maciça esta cada vez mais cara e mais difícil de se obter, tornando assim cada vez mais necessária a redução no consumo de madeira maciça. Como a madeira laminada colada (MLC) faz o uso de menores dimensões da madeira, sendo ao mesmo tempo projetada para ser mais forte e do mesmo tamanho que a madeira maciça, seu emprego na construção civil tem aumentado consideravelmente.



Figura 1: Cooperativa de vinhos no noroeste da Espanha



Figura 2: Shopping Iguatemi - Fortaleza/CE

6.3 Estabilidade exponencial

Vamos considerar o sistema (6.1)-(6.3) para duas vigas com “damping” estrutural $4\gamma s_t$ gerado pelo deslizamento interfacial s e amortecimento friccional αu_t e $\beta(s - \psi)_t$

$$\rho_1 u_{tt} + k(\psi - u_x)_x + \alpha u_t = 0, \quad (6.1)$$

$$\rho_2 (s - \psi)_{tt} - b(s - \psi)_{xx} - k(\psi - u_x) + \beta(s - \psi)_t = 0, \quad (6.2)$$

$$\rho_2 s_{tt} - b s_{xx} + 3k(\psi - u_x) + 4\delta s + 4\gamma s_t = 0. \quad (6.3)$$

aqui $u(x, t)$ denota as vibrações transversais, $\psi(x, t)$ representa o angulo de rotação e $s(x, t)$ é proporcional a quantidade de deslizamento na interface de contato no tempo t na variável longitudinal espacial x . $\rho_1, k, \rho_2, b, \delta, \gamma$ são constantes que representam a densidade da viga, a rigidez do cisalhamento, momento de inércia, rigidez da flexão, rigidez do adesivo e o adesivo da viga, onde $(x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$ com condições de fronteira

$$u(0, t) = \psi(0, t) = s(0, t) = 0, \quad (6.4)$$

$$s_x(1, t) = \psi_x(1, t) = 0, \quad u_x(1, t) = \psi(1, t), \quad (6.5)$$

e dados iniciais

$$\begin{aligned} (u(x, 0), \psi(x, 0), s(x, 0)) &= (u_0(x), \psi_0(x), s_0(x)) \in \mathcal{H} = [H_0^1(0, 1)]^3, \\ (u_t(x, 0), \psi_t(x, 0), s_t(x, 0)) &= (u_1(x), \psi_1(x), s_1(x)) \in \mathcal{V} = [L^2(0, 1)]^3. \end{aligned}$$

In [4] the system (6.10)-(6.5) was derived in details and was proved the existence and uniqueness of solution in the class

$$(u, \psi, s) \in C([0, T] : \mathcal{H}) \cap C^1([0, T] : \mathcal{V}).$$

Now for asymptotic behaviour, in this work, we applied the Energy Method, that consists in the use of appropriated multiplies to build a functional of Lyapunov for the system.

6.3.1 Energia do sistema

De agora em diante iremos usar a seguinte notação

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x, t)v(x, t)dx, \quad u, v \in H_0^1(0, 1), \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle = \|u\|^2.$$

Vamos então deduzir a energia do sistema e provar seu caráter dissipativo. De fato temos o seguinte resultado.

Teorema 6.1. *A energia do sistema é dada por*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}[3\rho_1 \|u_t\|^2 + 3k \|\psi - u_x\|^2 + \rho_2 \|s_t\|^2 + b \|s_x\|^2 \\ &\quad + 4\delta \|s\|^2 + 3\rho_2 \|(s - \psi)_t\|^2 + 3b \|(s - \psi)_x\|^2] \end{aligned}$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -3\alpha \|u_t\|^2 - 4\gamma \|s_t\|^2 - 3\beta \|(s - \psi)_t\|^2.$$

Demonstração. Primeiro multiplicamos (6.10) por $3u_t$ e obtemos

$$\langle \rho_1 u_{tt}, 3u_t \rangle + \langle k(\psi - u_x)_x, 3u_t \rangle + \langle \alpha u_t, 3u_t \rangle = 0.$$

Fazendo integração por partes e usando as condições de fronteira obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} 3\rho_1 \|u_t\|^2 - \langle 3k(\psi - u_x), u_{xt} \rangle + 3\alpha \|u_t\|^2 = 0.$$

A última equação pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} 3\rho_1 \|u_t\|^2 - \langle 3k(\psi - u_x), (u_x - \psi + \psi)_t \rangle + 3\alpha \|u_t\|^2 = 0,$$

e então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [3\rho_1 \|u_t\|^2 + 3k \|\psi - u_x\|^2] + \langle 3k(\psi - u_x)_x, -\psi_t \rangle = -3\alpha \|u_t\|^2 \quad (6.6)$$

Agora multiplicando (6.10) por s_t temos

$$\langle \rho_2 s_{tt}, s_t \rangle - \langle b s_{xx}, s_t \rangle + \langle 3k(\psi - u_x), s_t \rangle + \langle 4\delta s, s_t \rangle + \langle 4\gamma s_t, s_t \rangle = 0.$$

Fazendo integração por partes temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\rho_2 \|s_t\|^2 + b \|s_x\|^2 + 4\delta \|s\|^2] + \langle 3k(\psi - u_x), s_t \rangle = -\|s_t\|^2. \quad (6.7)$$

Neste momento multiplicamos (6.10) por $3(s - \psi)_t$ e obtemos

$$\begin{aligned} \langle \rho_2 (s - \psi)_{tt}, 3(s - \psi)_t \rangle - \langle b(s - \psi)_{xx}, 3(s - \psi)_t \rangle - \langle k(\psi - u_x), 3(s - \psi)_t \rangle \\ + \langle \beta (s - \psi)_t, 3(s - \psi)_t \rangle = 0. \end{aligned}$$

Fazendo integração por partes e usando as condições de fronteira obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [3\rho_2 \|(s - \psi)_t\|^2 + 3b \|(s - \psi)_x\|^2] \\ - \langle 3k(\psi - u_x), (s - \psi)_t \rangle = -2\beta \|(s - \psi)_t\|^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Agora, somando (6.6), (6.7), (6.8) e observando o cancelamento dos termos abaixo

$$\begin{aligned} &+ \langle 3k(\psi - u_x)_x, -\psi_t \rangle \\ &- \langle 3k(\psi - u_x), (s - \psi)_t \rangle \\ &+ \langle 3k(\psi - u_x), s_t \rangle \end{aligned}$$

fica provado o caráter dissipativo da Energia Total do sistema, isto é,

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -3\alpha \|u_t\|^2 - 4\gamma \|s_t\|^2 - 3\beta \|(s - \psi)_t\|^2.$$

□

6.3.2 Lemas técnicos

Observamos que o funcional de energia restaura alguns termos da energia com o sinal negativo.

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -3\alpha\|u_t\|^2 - 4\gamma\|s_t\|^2 - 3\beta\|(s - \psi)_t\|^2.$$

Estamos interessados em construir um funcional de Lyapunov que restaure todos os termos da energia com o sinal negativo e para conseguirmos nosso objetivo considere os seguintes lemas.

Lema 6.1. *Definindo*

$$S(x, t) = \int_0^x s(r, t) dr \text{ e } L_1(t) = \langle \rho_1 u_t, S \rangle + \langle 2\rho_2 s_t, s \rangle + 2\gamma\|s\|^2,$$

temos

$$\frac{d}{dt}L_1(t) \leq -2b\|s_x\|^2 - 2\delta\|s\|^2 + C_\epsilon [\|s_t\|^2 + \|u_t\|^2] + \epsilon \left[\frac{1}{2}\|s\|^2 + \frac{1}{2}\|s_t\|^2 \right].$$

Demonstração. Usando (6.3) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \rho_2 s_t, s \rangle &= \langle \rho_2 s_{tt}, s \rangle + \langle \rho_2 s_t, s_t \rangle \\ &= \langle b s_{xx}, s \rangle - \langle 3k(\psi - u_x), s \rangle - \langle 4\delta s, s \rangle - \langle 4\gamma s_t, s \rangle + \langle \rho_2 s_t, s_t \rangle \\ &= -b\|s_x\|^2 - \langle 3k(\psi - u_x), s \rangle - 4\delta\|s\|^2 - 4\gamma\frac{d}{dt}\|s\|^2 + \rho_2\|s_t\|^2. \end{aligned}$$

Usando S temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle 3\rho_1 u_t, S \rangle &= \langle 3\rho_1 u_{tt}, S \rangle + \langle 3\rho_1 u_t, S_t \rangle \\ &= -\langle 3k(\psi - u_x)_x, S \rangle - \langle 3\alpha u_t, S \rangle + \langle 3\rho_1 u_t, S_t \rangle \\ &= \langle 3k(\psi - u_x), S_x \rangle - \langle 3\alpha u_t, S \rangle + \langle 3\rho_1 u_t, S_t \rangle \\ &= \langle 3k(\psi - u_x), s \rangle - \langle 3\alpha u_t, S \rangle + \langle 3\rho_1 u_t, S_t \rangle. \end{aligned}$$

Agora temos

$$\frac{d}{dt}L_1(t) = -b\|s_x\|^2 - 4\delta\|s\|^2 + \rho_2\|s_t\|^2 - \langle 3\alpha u_t, S \rangle + \langle 3\rho_1 u_t, S_t \rangle.$$

Note que $\|S\|^2 \leq \|s\|^2$, $\|S_t\|^2 \leq \|s_t\|^2$.

Escrevendo

$$\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{\epsilon}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{\epsilon} \tag{6.9}$$

e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}L_1(t) \leq -b\|s_x\|^2 - 4\delta\|s\|^2 + C_\epsilon [\|s_t\|^2 + \|u_t\|^2] + \epsilon \left[\frac{1}{2}\|s\|^2 + \frac{1}{2}\|s_t\|^2 \right].$$

□

Lema 6.2. *Definindo*

$$\Psi(x, t) = \int_0^x \psi(r, t) dr \text{ e } L_2(t) = -\langle \rho_1 u_t, \Psi \rangle + \langle \rho_1 u_t, u \rangle + \frac{1}{2} \alpha \|u\|^2,$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} L_2(t) \leq -2b \|\psi - u_x\|^2 + C_\epsilon \|u_t\|^2 + \epsilon \left[\frac{1}{2} \|\psi\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi_t\|^2 \right].$$

Demonstração. Usando (6.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \rho_1 u_t, u \rangle &= \langle \rho_1 u_{tt}, u \rangle + \langle \rho_1 u_t, u_t \rangle \\ &= -\langle k(\psi - u_x)_x, u \rangle - \langle \alpha u_t, u \rangle + \langle \rho_1 u_t, u_t \rangle \\ &= \langle k(\psi - u_x), u_x \rangle - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha \|u\|^2 + \rho_1 \|u_t\|^2 \\ &= \langle k(\psi - u_x), u_x - \psi + \psi \rangle - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha \|u\|^2 + \rho_1 \|u_t\|^2 \\ &= -k \|\psi - u_x\|^2 + \langle k(\psi - u_x), \psi \rangle - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha \|u\|^2 + \rho_1 \|u_t\|^2. \end{aligned}$$

Usando Ψ temos

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \langle \rho_1 u_t, \Psi \rangle &= -\langle \rho_1 u_{tt}, \Psi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Psi_t \rangle \\ &= \langle k(\psi - u_x)_x, \Psi \rangle + \langle \alpha u_t, \Psi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Psi_t \rangle \\ &= -\langle k(\psi - u_x), \Psi_x \rangle + \langle \alpha u_t, \Psi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Psi_t \rangle \\ &= -\langle k(\psi - u_x), \psi \rangle + \langle \alpha u_t, \Psi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Psi_t \rangle. \end{aligned}$$

Note que $\|\Psi\|^2 \leq \|\psi\|^2$, $\|\Psi_t\|^2 \leq \|\psi_t\|^2$.

Usando (6.9) e a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt} L_2(t) \leq -k \|\psi - u_x\|^2 + C_\epsilon \|u_t\|^2 + \epsilon \left[\frac{1}{2} \|\psi\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi_t\|^2 \right].$$

□

Lema 6.3. *Considere*

$$L(t) = \langle \rho_2 (s - \psi)_t, (s - \psi) \rangle \text{ e } \Phi(x, t) = \int_0^x (s - \psi)(r, t) dr.$$

Definindo

$$L_3(t) = -\langle \rho_1 u_t, \Phi \rangle + L(t) + 2\beta \|s - \psi\|^2.$$

temos

$$\frac{d}{dt} L_3(t) \leq -b \|(s - \psi)_x\|^2 + \rho_1 \|(s - \psi)_t\|^2 + C_\epsilon \|u_t\|^2 + \epsilon \left[\frac{1}{2} \|(s - \psi)\|^2 + \frac{1}{2} \|(s - \psi)_t\|^2 \right].$$

Demonstração. Usando (6.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &= \langle \rho_2(s - \psi)_{tt}, (s - \psi) \rangle + \langle \rho_2(s - \psi)_t, (s - \psi)_t \rangle \\
&= \langle b(s - \psi)_{xx}, (s - \psi) \rangle + \langle k(\psi - u_x), (s - \psi) \rangle \\
&\quad - \langle \beta(s - \psi)_t, (s - \psi) \rangle + \langle \rho_2(s - \psi)_t, (s - \psi)_t \rangle \\
&= -\langle b(s - \psi)_x, (s - \psi)_x \rangle + \langle k(\psi - u_x), (s - \psi) \rangle \\
&\quad - \langle \beta(s - \psi)_t, (s - \psi) \rangle + \langle \rho_2(s - \psi)_t, (s - \psi)_t \rangle \\
&= -b\|(s - \psi)_x\|^2 + \langle k(\psi - u_x), (s - \psi) \rangle - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\beta\|s - \psi\|^2 + \rho_2\|(s - \psi)_t\|^2.
\end{aligned}$$

Usando Φ , temos

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\langle \rho_1 u_t, \Phi \rangle &= -\langle \rho_1 u_{tt}, \Phi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Phi_t \rangle \\
&= \langle k(\psi - u_x)_x, \Phi \rangle + \langle \alpha u_t, \Phi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Phi_t \rangle \\
&= -\langle k(\psi - u_x), \Phi_x \rangle + \langle \alpha u_t, \Phi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Phi_t \rangle \\
&= -\langle k(\psi - u_x), (s - \psi) \rangle + \langle \alpha u_t, \Phi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Phi_t \rangle.
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{d}{dt}L_3(t) = -b\|(s - \psi)_x\|^2 + \rho_2\|(s - \psi)_t\|^2 + \langle \alpha u_t, \Phi \rangle - \langle \rho_1 u_t, \Phi_t \rangle.$$

Note que $\|\Phi\|^2 \leq \|(s - \psi)\|^2$, $\|\Psi_t\|^2 \leq \|(s - \psi)_t\|^2$.

Usando (6.9) e a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}L_3(t) \leq -b\|(s - \psi)_x\|^2 + \rho_2\|(s - \psi)_t\|^2 + C_\epsilon\|u_t\|^2 + \epsilon \left[\frac{1}{2}\|(s - \psi)\|^2 + \frac{1}{2}\|(s - \psi)_t\|^2 \right].$$

□

6.3.3 Estabilidade exponencial

Estamos em condições de provar nosso principal resultado.

Teorema 6.2. *O problema*

$$\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} + k(\psi - u_x)_x + \alpha u_t &= 0, \\
\rho_2(s - \psi)_{tt} - b(s - \psi)_{xx} - k(\psi - u_x) + \beta(s - \psi)_t &= 0, \\
\rho_2 s_{tt} - b s_{xx} + 3k(\psi - u_x) + 4\delta s + 4\gamma s_t &= 0.
\end{aligned}$$

é exponencialmente estável, isto é,

$$E(t) \leq C E(0) e^{-wt}, \text{ for some } C > 0, w > 0.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &\leq -3\alpha\|u_t\| - 4\gamma\|s_t\|^2 - 3\beta\|(s - \psi)_t\|^2. \\ \frac{d}{dt}L_1(t) &\leq -2b\|s_x\|^2 - 2\delta\|s\|^2 + C_\epsilon [\|s_t\|^2 + \|u_t\|^2] + \epsilon \left[\frac{1}{2}\|s\|^2 + \frac{1}{2}\|s_t\|^2 \right]. \\ \frac{d}{dt}L_2(t) &\leq -2b\|\psi - u_x\|^2 + C_\epsilon\|u_t\|^2 + \epsilon \left[\frac{1}{2}\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_t\|^2 \right]. \\ \frac{d}{dt}L_3(t) &\leq -b\|(s - \psi)_x\|^2 + \rho_1\|(s - \psi)_t\|^2 + C_\epsilon\|u_t\|^2 + \epsilon \left[\frac{1}{2}\|(s - \psi)\|^2 + \frac{1}{2}\|(s - \psi)_t\|^2 \right].\end{aligned}$$

Agora definimos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ por

$$\mathcal{L}(t) = N E(t) + L_1(t) + L_2(t) + L_3(t),$$

e então temos para ϵ absolutamente pequeno e N suficientemente grande que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_0 E(t).$$

Da equivalência entre $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ concluímos que

$$E(t) \leq C E(0) e^{-wt}, \text{ for some } C > 0, w > 0.$$

□

Referências

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York (1975).
- [2] Sebastião M. S. Cordeiro, Renato F. C. Lobato, Mauro L. Santos, Dilberto S. Almeida Junior. *Optimal Polynomial Decay to Coupled Wave Equations and Its Numerical Properties*. Journal of Applied Mathematics, 2014, 1-9, (2014).
- [3] J. L. Lions. *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*. Collection RMA - Tomo 1, Masson , Paris, (1998).
- [4] S. W. Hansen. *In Control and Estimation of Distributed Parameter Systems: Non-linear Phenomena*. International Series of Numerical Analysis, ISNA 118, (1994) 143-170. Basel: Birkhäuser. A Model for a two-layered plate with interfacial slip.
- [5] S. W. Hansen, R. Spies. *Structural damping in a laminated beam due to interfacial slip*. J. Sound Vibration, 204, 183-202, (1997).
- [6] A. Lo, N.-e. Tatar. *Exponential stabilization of a structure with interfacial slip*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A), 36, Issue 11, 6285-6306, (2016).

- [7] A. Lo, N.-e. Tatar. *Stabilization of laminated beams with interfacial slip*, Electronic Journal of Differential Equations, (,129, 1-14, 2015).
- [8] Ducival C. Pereira, C. A. Raposo. *Asymptotic behavior for semi-linear wave equation with weak damping*. Int. Journal of Math. Analysis, 7, 713-718, (2013).
- [9] Ducival C. Pereira, Renato F. C. Lobato, C. A. Raposo. *Energy Decay to an abstract coupled system of extensible beams models*. Appl. Math. Inf. Sci. 6(3), 447-452, (2012).
- [10] Ducival C. Pereira, Celsa Maranhão, C. A. Raposo. *Asymptotic behaviour to a Von Kármán system with internal damping*. Applied Mathematics. 3, 210-212, (2012).
- [11] Ducival C. Pereira, Celsa H. Maranhão, J. D. Chuquipoma, C. A. Raposo. *Exponential Stability to a quasilinear Hyperbolic Equation with internal damping*. International Journal of Applied Mathematics, 29(3), 381-387, (2016).
- [12] C. A. Raposo. *Exponential stability for a structure with interfacial slip and frictional damping*. App. Math. Lett. 53, 85-91, (2016).
- [13] C. A. Raposo, D. A. Z. Villanueva, S. M. Borjas, Ducival C. Pereira. *Exponential stability for a structure with interfacial slip and memory*. Poincare Journal of Analysis and Application, 2, 39-48, (2016).
- [14] C. A. Raposo, Ducival C. Pereira, Geraldo Araujo, Anderson Baena. *Unilateral problems for the Klein-Gordon operator with nonlinearity of Kirchhoff-Carrier type*. Electron. J. Diff. Equ., 37 1-14, (2015).
- [15] C. A. Raposo, Mauro L. Santo. *General Decay to a von Karman System with memory*. Nonlinear Analysis. 74, 937-945, (2011).
- [16] J.-M. Wang, G.-Q. Xu, S.-P. Yung. *Exponential stabilization of laminated beams with structural damping and boundary feedback controls*, SIAM J. Control Optim. 44(5), 1575-1597 (2005).

CARLOS ALBERTO RAPOSO DA CUNHA

Depto. de Matemática e Estatística
 UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei
 Praça Frei Orlando 170, Cep 36307-352, São João del-Rei, MG.
 email: raposo@ufsj.edu.br
www.carlosraposo.com.br
