Universidade Federal do Rio Grande Grande do Norte - UFRN
Centro de Ciências Exatas e da Terra - CCET
Departamento de Matemática
Semana da Matemática - 18 a 21 de outubro de 2016

PROBLEMA DE TRANSMISSÃO PARA A EQUAÇÃO DE ONDAS *

Carlos Alberto Raposo da Cunha †

Sumário

---

* *Código de classificação matemática:* 35L25, 35L15
Palavras-chave: Equação de ondas, método de Faedo-Galerkin, sistema dissipativo, problema de transmissão, estabilidade de solução.
† UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei, Brasil, raposo@ufsj.edu.br, www.carlosraposo.com.br

1 Introdução

O estudo das Equações Diferenciais começa com a criação do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII e é guiado, inicialmente, por suas aplicações à mecânica das partículas. Nessas aplicações, o uso de leis físicas, como as três leis de Newton da Dinâmica e a lei da gravitação universal, possibilitam obter Equações Diferenciais Ordinárias que representam os fenômenos em estudo.

O sucesso em tratar esses problemas utilizando o Cálculo foi um enorme estímulo aos físicos e matemáticos do século seguinte em procurar modelos para problemas da Mecânica do Contínuo e de outros ramos da Física (Termologia, por exemplo) que expressem fenômenos em termos de Equações Diferenciais.

Entretanto as equações resultantes, sendo Equações Diferenciais Parciais, traziam sérias dificuldades em sua resolução.

Dois problemas básicos que aparecem no estudo dos matemáticos do século XVIII são as seguintes:

(1) No problema da condução do calor em uma barra, a temperatura $u(x,t)$ do ponto x da barra, no instante t, deve satisfazer à equação do calor

$$u_t - k\, u_{xx} = 0.$$

(2) No problema das vibrações transversais de uma corda, a posição $u(x,t)$ de um ponto x da corda, num instante t, deve satisfazer à equação de ondas

$$u_{tt} - k\, u_{xx} = 0.$$

Para os problemas (1) e (2), k é uma constante real positiva. A obtenção de soluções satisfazendo, além da equação diferencial, a certas condições iniciais e condições de fronteira é uma tarefa difícil.

Para o estudo da existência de solução destes problemas os métodos analíticos foram surgindo por adaptação de uma idéia original de Fourier (1822), que consistiu na técnica de separação de variáveis para obter problemas de autovalor, para as Equações Diferenciais Ordinárias, estreitamente relacionadas com as Equações Diferenciais Parciais em questão. Em (1908) tivemos o método de Ritz para problemas variacionais e como generalização deste tivemos o método de Galerkin (1908). Explorando a idéia original de Fourier, Sandro Faedo (1945) aprimorou o método de Galerkin e desenvolveu um método conhecido atualmente como método de Faedo-Galerkin para a resolução de problemas de evolução.

Neste contexto duas questões surgem naturalmente na resolução de problemas governados por Equações Diferenciais Parciais: A existência da solução e a estabilidade da solução. Neste minicurso estudaremos estas duas questões.

É portanto, de fundamental importância o futuro matemático dominar o método de Faedo-Galerkin, atualmente o mais utilizado para resolução analítica de Equações Diferenciais Parciais e em relação a estabilidade, dominar o Método de Energia, utilizado para fazer a análise do comportamento assintótico da solução obtida.

O ambiente natural para buscar a solução de Equações Diferenciais Parcias é o Espaço de Sobolev cuja referência bibliográfica classica é R. A. Adams [4]. Com relação ao comportamento assintótico da solução a bibliografia está diretamente relacionada com o tipo de mecanismo dissipativo introduzido para a estabilização do sistema. Neste minicurso limitaremos o estudo ao "damping" friccional, ver E. Zuazua [2].

Cabe informar que utilizaremos uma bibliografia mais recente o que permitirá ao aluno uma análise comparativa da evolução da linguagem e das técnicas aprimoradas nos últimos anos.

As idéias centrais do que pretendemos estudar no âmbito deste minicurso pode ser encontrada em [5].

2 Objetivo

Nosso objetivo é estudar a existência de solução para a equação de ondas através do método de Faedo-Galerkin, estudar o comportamento assintótico para ondas com amortecimento friccional em todo o domínio utilizando o Método de Energia e por fim a estabilidade da solução para o correspondente problema de transmissão, onde o atrito está localizado em uma pequena parte do domínio.

3 Metodologia

Denotamos por

$$L^2(0,L)=\left\{u\,:\,(0,L)\to\mathbb{R}\setminus\int_0^L|u\,|^2dx\leq C\right\}$$

e introduzimos os seguintes espaços de Sobolev, que faremos uso ao longo do texto.

$$\begin{aligned}H^1(0,L)&=\left\{u\in L^2(0,L)\quad\text{tal que}\quad u_x\in L^2(0,L)\right\},\\ H_0^1(0,L)&=\left\{u\in H^1(0,L)\quad\text{tal que}\quad u(0)=u(L)=0\right\},\\ H^2(0,L)&=\left\{u\in L^2(0,L)\quad\text{tal que}\quad u_x\in L^2(0,L)\quad\text{e}\quad u_{xx}\in L^2(0,L)\right\}.\end{aligned}$$

Inicialmente iremos considerar as pequenas vibrações verticais de uma corda delgada de comprimento finito L, fixa nas extremidades. Vamos denotar por $u = u(x,t)$ a posição da corda no ponto $x \in (0,L)$ no instante $t > 0$. Nesta condição temos o seguinte modelo conhecido como equação da onda.

$$\begin{aligned} u_{tt} - k\, u_{xx} &= 0, \quad x \in\ (0,L),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Os dados iniciais do problema (3.1) serão escolhidos nos espaços de Sobolev conforme indicado abaixo

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(0,L) \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \in L^2(0,L). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Em seguida iremos obter a solução de (3.1)-(3.2) através do Método de Faedo-Galerkin, o qual consiste em obter a solução do problema aproximado em um espaço de dimensão finita e usando resultados de imersões dos espaços de Sobolev, gerar condições para passagem ao limite e consequentemente obter a solução do problema no espaço onde estão localizados os dados iniciais.

Esta solução com os dados iniciais em H_0^1 e L^2 é denominada solução fraca enquanto que a solução com os dados iniciais $u_0 \in H_0^1 \cap H^2$ e $u_1 \in H_0^1$ é denominada solução forte.

Conhecendo a solução denotamos a energia total do modelo por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2\, dx + \frac{k}{2}\int_0^L |u_x|^2\, dx,$$

onde a primeira parcela é a energia cinética e a segunda parcela é a energia potencial.

É fácil verificar que a energia total de (3.1)-(3.2) é conservativa, isto é

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

Acontece que em situações da vida real, a corda após ser posta em movimento, deixa de vibrar por vários motivos, tais como, o atrito, a resistencia do material, a diferença de temperatura entre a corda e o meio ambiente, a viscosidade, etc. Estaremos abordando o modelo com atrito, cuja formalização segue abaixo.

$$\begin{aligned} u_{tt} - k\, u_{xx} + \alpha\, u_t &= 0, \quad x \in\ (0,L),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0. \\ \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ u_t(x,0) &= u_1(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Neste momento utilizando adequados multiplicadores, via o Método de Energia construiremos um funcional de Lyapunov, que é um funcional equivalente ao funcional de Energia e que decai exponencialmente.

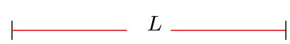
Com o funcional de Lyapunov iremos provar a estabilidade exponencial do modelo dissipativo (3.3). Do ponto de vista matemático iremos provar a seguinte desigualdade

$$E(t) \leq C\, E(0)\, e^{-w\, t}$$

onde C e w são constantes reais, positivas e independentes dos dados iniciais. Agora observamos que o atrito tem efeito em toda a corda, isto é, o atrito está definido em todo o intervalo $(0, L)$.

Atrito em todo o domínio

$u_t(x,t),\ x \in (0, L)$



Constitui-se um problema interessante do ponto de vista matemático localizar o atrito em apenas uma pequena parte do dominio. Neste sentido também iremos considerar o seguinte modelo

$$\begin{aligned} u_{tt} - k_1 u_{xx} + \alpha u_t &= 0, \quad x \in\ (0, L_0),\ t > 0, \qquad (3.4)\\ v_{tt} - k_2 v_{xx} &= 0, \quad x \in\ (L_0, L),\ t > 0, \qquad (3.5)\end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições de fronteira

$$u(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.6}$$

as seguintes condiçõs de transmissão

$$u(L_0,t) = v(L_0,t), \quad k_1 u_x(L_0,t) = k_2 v_x(L_0,t), \quad t > 0, \tag{3.7}$$

e dados iniciais

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in\ (0, L_0),\\ v(x,0) &= v^0(x), \quad v_t(x,0) = v^1(x), \quad x \in\ (L_0, L). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Note que agora o atrito está localizado no intervalo $(0, L_0)$.

Parte com atrito *Parte sem atrito*

$u(x,t)$, $x \in (0, L_0)$ $v(x,t)$, $x \in (L_0, L)$

Duas questões centrais surgem de modo natural:

Questão 01. A dissipação localizada em parte do domínio é suficiente para estabilizar todo o sistema ?

Questão 02. Se o sistema (3.4)-(3.8) for estável, qual a taxa de decaimento da solução ?

O ponto alto deste minicurso é responder a estas questões.

Na prática o modelo (3.4)-(3.8) está relacionado com a descoberta de novos materiais para aplicação na industria. O que estamos fazendo é "misturando" materiais de propriedades físicas diferentes, sendo um deles dotado de boas propriedades físicas. Estamos provando que as propriedades do material "bom" se transmitem ao outro gerando um novo material com propriedades físicas boas e viável do ponto de vista econômico, posto que no modelo (3.4)-(3.8) utilizamos apenas uma pequena quantidade do material que estamos indicando como "bom".

Iremos então provar a estabildade exponencial deste sistema que estamos denominando de *Problema de Transmissão para a equação de ondas com amortecimento friccional.* Para provarmos o decaimento exponencial da solução iremos utilizar as idéias contidas em Raposo & Bastos [05].

4 O Método de Faedo-Galerkin

Inicialmente vamos dizer o que entendemos por solução fraca para o modelo

$$\left.\begin{array}{rcl} u_{tt} - k\, u_{xx} &=& 0, \quad x \in\ (0, L),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) &=& 0, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) &=& u_0 \in H_0^1 \\ u_t(x,0) &=& u_1 \in L^2 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Definição 4.1 *Dizemos que* $u : (0, L) \to \mathbb{R}$ *é uma solução fraca para (4.1) quando*

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u_t\, \phi\, dx + k\int_0^L u_x\, \phi_x\, dx = 0 \quad \forall\ \phi \in H_0^1(0, L)$$

e a indentidade é no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

Vamos provar a existência e unicidade de solução para (4.1) utilizando o método de Faedo-Galerkin.

4.1 O problema aproximado

Considere $\{w_1, w_2, \cdots, w_m, \cdots\}$ uma base de $H_0^1(0, L)$. Como H_0^1 é um espaço de Hilbert, podemos utilizar o processo de ortogonalização de Granh-Schmidt e sem perda de generalidade, podemos supor que esta base é ortonormal.

Seja $V_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m]$ o espaço vetorial finito gerado pelos m-primeiros vetores da base de tal forma que

$$\lim_{m\to\infty} V_m = H_0^1.$$

O problema aproximado consiste em encontrar $u^m \in L^\infty(0, T, V_m)$ tal que

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u_t^m\, \phi\, dx + k\int_0^L u_x^m\, \phi_x\, dx = 0 \quad \forall\ \phi \in V_m \tag{4.2}$$

e além disto

$$\begin{array}{rcl} u^m(x,0) &=& u_0^m \to u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1 \\ u_t^m(x,0) &=& u_1^m \to u_1 \quad \text{em} \quad L^2 \end{array}$$

onde

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j(x).$$

Fazendo $\phi = w_i \in V_m$ em (4.2) obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u_t^m \, w_i \, dx + k\int_0^L u_x^m \, w_{i,x} \, dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m$$

isto é

$$\int_0^L u_{tt}^m \, w_i \, dx + k\int_0^L u_x^m \, w_{i,x} \, dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m$$

de onde segue

$$\sum_{j=1}^m \int_0^L g_{jm}^{''}(t) w_j \, w_i \, dx + k\sum_{j=1}^m \int_0^L g_{jm}(t) w_{j,x} \, w_{i,x} \, dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m.$$

Sendo a integral em $(0, L)$ temos

$$\sum_{j=1}^m g_{jm}^{''}(t) \int_0^L w_j \, w_i \, dx + k\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \int_0^L w_{j,x} \, w_{i,x} \, dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m.$$

Agora definimos

$$A^m = k\sum_{j=1}^m \int_0^L w_{j,x} \, w_{i,x} \, dx$$

e usando as propriedades da base ortonormal obtemos

$$g_{jm}^{''}(t) + A^m g_{jm}(t) = 0,$$

que é um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de 2^a ordem, que admite solução única em $(0, T)$, $T > 0$ para dados iniciais fixados.

4.2 Estimativas a priori

Vamos agora obter as estimativas que nos possibilite a passagem ao limite no problema aproximado.

Fazendo $\phi = w_j$ e multiplicando a equação aproximada (4.2) por $g_{jm}^{'}(t)$ obtemos

$$\int_0^L u_{tt}^m \, g_{jm}^{'}(t) \, w_i \, dx + k\int_0^L u_x^m \, g_{jm}^{'}(t) \, w_{i,x} \, dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m,$$

aplicando o somatório temos

$$\int_0^L u_{tt}^m \sum_{j=1}^m g_{jm}^{'}(t) \, w_i \, dx + k\int_0^L u_x^m \sum_{j=1}^m g_{jm}^{'}(t) \, w_{i,x} \, dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m,$$

de onde segue

$$\int_0^L u_{tt}^m \, u_t^m \, dx + k\int_0^L u_x^m \, u_{xt}^m \, dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m,$$

que pode sescrito do seguinte modo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_t^m|^2\,dx + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_x^m|^2\,dx = 0 \quad \text{em} \quad V_m.$$

Agora integramos em $(0,T)$, $T>0$ e obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^L |u_t^m|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_0^L |u_x^m|^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L |u_1^m|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_0^L |u_{0,x}^m|^2\,dx \quad \text{em} \quad V_m.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} u_0^m &\to u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1 \\ u_1^m &\to u_1 \quad \text{em} \quad L^2 \end{aligned}$$

e que $V_m \subset H_0^1 \subset L^2$ temos que

$$\frac{1}{2}\int_0^L |u_t^m|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_0^L |u_x^m|^2\,dx \leq C. \tag{4.3}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} u_t^m \quad &\text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2) \\ u_x^m \quad &\text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2) \end{aligned}$$

logo existe uma subsequência de u^m, que continuaremos denotando do mesmo modo, tal que

$$u_t^m \to u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2) \tag{4.4}$$

$$u_x^m \to u_x \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2) \tag{4.5}$$

4.3 Passagem ao limite

Da equação (4.2) temos

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u_t^m\, w\,dx + k\int_0^L u_x^m\, w_x\,dx = 0 \quad \forall\ w \in V_m.$$

Multiplicando por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em $(0,T)$ obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\int_0^L u_t^m\, w\,dx\,\theta\,dt + k\int_0^T\int_0^L u_x^m\, w_x\,dx\,\theta\,dt = 0 \quad \forall\ w \in V_m.$$

Integrando por partes obtemos

$$-\int_0^T\int_0^L u_t^m\, w\,dx\,\theta'\,dt + k\int_0^T\int_0^L u_x^m\, w_x\,dx\,\theta\,dt = 0 \quad \forall\ w \in V_m.$$

Agora passando ao limite $m \to \infty$ e utilizando as convergências (4.4) e (4.5) temos

$$-\int_0^T \int_0^L u_t\, w\, dx\, \theta'\, dt + k \int_0^T \int_0^L u_x\, w_x\, dx\, \theta\, dt = 0 \quad \forall\; w \in H_0^1.$$

Integrando novamente por partes

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^L u_t\, w\, dx\, \theta\, dt + k \int_0^T \int_0^L u_x\, w_x\, dx\, \theta\, dt = 0 \quad \forall\; w \in H_0^1.$$

Logo podemos escrever

$$\langle \frac{d}{dt} \int_0^L u_t\, w\, dx\, \theta\, dt + k \int_0^L u_x\, w_x\, dx\, \theta\, dt\, ,\, \theta \rangle = 0$$

onde $\langle\, ,\, \rangle$ denota o produto interno em $\mathcal{D}(0,T)$.

Podemos afirmar que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t\, w\, dx + k \int_0^L u_x\, w_x\, dx = 0 \quad \forall \quad w \in H_0^1 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T).$$

o que prova a existência de solução fraca.

Observação 4.1 *Note que para a obtenção de solução fraca provamos*

$$\frac{1}{2} \int_0^L |u_t^m|^2\, dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_x^m|^2\, dx \leq C,$$

isto é, provamos que a energia de primeira ordem é limitada.

Agora vamos definir solução forte. Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - k\, u_{xx} &= 0, \quad x \in\; (0,L),\; t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) &= u_0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ u_t(x,0) &= u_1 \in H_0^1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definição 4.2 *Dizemos que* $u\, :\, (0,L) \to \Re$ *é uma solução forte para (4.6) quando*

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_{tt}\, \phi\, dx + k \int_0^L u_{tx}\, \phi_x\, dx = 0 \quad \forall\; \phi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$$

e a indentidade é no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Observação 4.2 *Para provamos a existência de solução forte, derivamos a solução aproximada em relação a variável tempo e procedimos de maneira análoga ao caso de solução fraca para obtemos uma limitação para a energia de segunda ordem, do tipo abaixo*

$$\frac{1}{2} \int_0^L |u_{tt}^m|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_{tx}^m|^2\, dx \leq C,$$

com esta limitação podemos obter as convergências necessárias para passagem ao limite na equação aproximada.

4.4 Unicidade de solução

Vamos supor que exista duas soluções u e v nas seguintes condições:

$$\begin{aligned} u_{tt} - k\, u_{xx} &= 0, \quad x \in\ (0,L),\ t>0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t>0 \\ \\ u(x,0) &= u_0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ u_t(x,0) &= u_1 \in H_0^1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} v_{tt} - k\, v_{xx} &= 0, \quad x \in\ (0,L),\ t>0, \\ v(0,t) = v(L,t) &= 0, \quad t>0 \\ \\ v(x,0) &= u_0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ v_t(x,0) &= u_1 \in H_0^1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Definimos $z = u - v$ e obtemos de (4.7) e (4.8) o seguinte problema

$$\begin{aligned} z_{tt} - k\, z_{xx} &= 0, \quad x \in\ (0,L),\ t>0, \\ z(0,t) = z(L,t) &= 0, \quad t>0 \\ \\ z(x,0) &= 0 \in H_0^1 \cap H^2 \\ z_t(x,0) &= 0 \in H_0^1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Multiplicando (4.9) por z_t, integrando por parte e usando a hipótese que os dados iniciais são nulos, temos que

$$\frac{1}{2}\int_0^L |z_t|^2\, dx + \frac{k}{2}\int_0^L |z_x|^2\, dx = 0,$$

de onde segue diretamente da desigualdade de Poincar'e que $z = 0$ e portanto $u = v$.

5 O Método de Energia

Nesta seção iremos considerar a equação de ondas com amortecimento friccional e iremos provar que a solução decai exponenciamente. Neste sentido consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} - k\, u_{xx} + \alpha\, u_t &= 0, \quad x \in\ (0,L),\ t>0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t>0. \\ \\ u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \in H_0^1(0,L). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Inicialmente vamos mostrar que este modelo é dissipativo.

Multiplicando a equação de ondas dissipativas por u_t e integramdo em $(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L u_{tt}\, u_t\, dx - k \int_0^L u_{xx}\, u_t\, dx + \alpha \int_0^L |u_t|^2\, dx = 0.$$

Integrando por partes e utilizando as condições de contorno obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2\, dx + \frac{d}{dt}\frac{k}{2}\int_0^L |u_x|^2\, dx = -\,\alpha \int_0^L |u_t|^2\, dx,$$

isto é

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\,\alpha \int_0^L |u_t|^2\, dx, \tag{5.2}$$

de onde segue que a energia total é decrescente e portanto o sistema é dissipativo.

Agora note que na expressão (5.2) conseguimos recuperar parte da energia com o sinal negativo, isto é, apenas a energia cinética. Vamos agora recuperar o restante da energia, ou seja, vamos recuperar a energia potencial.

Neste sentido, multiplicando a equação de ondas dissipativas por u e integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L u_{tt}\, u\, dx - k \int_0^L u_{xx}\, u\, dx + \alpha \int_0^L u_t\, u\, dx = 0. \tag{5.3}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_t\, u &= u_{tt}\, u + |u_t|^2 \\ \frac{d}{dt}u_x\, u &= u_{xx}\, u + |u_x|^{2.} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Agora integrando (5.3) por partes, utilizando as conndições de contorno e também as identidades (5.4) obtemos

$$\frac{d}{dt}[\int_0^L u_t\, u\, dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u|^2\, dx] = \int_0^L |u_t|^2\, dx - k\int_0^L |u_x|^2\, dx. \tag{5.5}$$

Agora definimos

$$E_1(t) = \int_0^L u_t\, u\, dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u|^2\, dx$$

e de (5.2) e (5.5) obtemos para $\varepsilon > 0$

$$\frac{d}{dt}[E(t) + \varepsilon\, E_1(t)] = -(\alpha - \varepsilon)\int_0^L |u_t|^2\, dx - k\,\varepsilon\int_0^L |u_x|^2\, dx. \tag{5.6}$$

O funcional $\mathcal{L}(t) = E(t) + \varepsilon\, E_1(t)$ é denominado de funcional de Lyapunov. Por sua construção este funcional é equivalente ao funcional de energia $E(t)$, isto é, existem constantes positivas c_1 e c_2 tal que

$$c_1\, E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2\, E(t). \tag{5.7}$$

Agora escolhendo

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$$

segue de (5.6) que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = -\,\alpha\,[\frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2\, dx + \frac{k}{2}\int_0^L |u_x|^2\, dx].$$

Finalmente usando (5.7) na expressão anterior podemos concluir que

$$E(t) \leq C\, E(0)\, e^{-\,w\,t}, \quad \text{onde} \quad C = \frac{1}{c_1} \quad \text{e} \quad w = \frac{\alpha}{c_2}.$$

Vamos provar que o mesmo resultado sobre o decaimento exponencial vale para soluções fracas. Para isto, fixamos o dado inicial fraco, por densidade, consideremos uma sequência de dados fortes que converge na norma de $E(t)$, ao dado inicial fraco, isto é,

$$E(0, u^n) \to E(0, u) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Pelo resultado anterior temos

$$E(t, u^n) \leq C\, E(0, u^n)\, e^{-\,w\,t}$$

onde C e w não dependem dos dados iniciais. Agora usando a semi-continuidade fraca do funcional de energia temos que

$$\begin{aligned} E(t,u) &\leq \liminf_{n\to\infty} E(t, u^n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} C\, E(0,u^n)\, e^{-\,w\,t} \\ &\leq C\, E(0,u)\, e^{-\,w\,t}. \end{aligned}$$

Na próxima seção iremos localizar a dissipação em parte do domínio e estudar a existência e o comportamento assintótico da solução do correspondente modelo.

6 O problema de Transmissão

6.1 Preliminares

Vários autores estudaram a equação de ondas com dissipação. Mencionamos por exemplo, o trabalho de Zuazua [2] onde foi obtida a taxa de decaimento uniforme para a solução de uma uma classe de equações de ondas não lineares com "damping" fricicional atuando em todo o domínio. Nesta direção, a questão natural que surge é: Qual a taxa de decaimento quando a dissipação tem efeito apenas em uma parte do domínio? O propósito deste minicurso, pelo menos em parte, é responder a esta questão. Iremos considerar a propagação de ondas sobre um corpo consistindo de dois tipos diferentes de materiais. Denominamos isto de problema de transmissão. Este tipo de problema aparece frequentemente em aplicações onde o domínio é caracterizado pela existência de vários materiais, cujas propriedades elásticas são diferentes.

Vamos agora falar um pouco sobre alguns resultados relacionados com o tema. A existência, regularidade e a controlabilidade exata do problema de trasnmissão para a equação de ondas puramente elástica foi estudado por Lions [4]. O problema de transmissão para ondas viscoelásticas foi estudado por Rivera & Oquendo [8] que provaram o decaimento exponencial da solução usando resultados de regularidade da integral de Volterra e propriedades regularizantes da viscosidade. O comportamento assintótico para o problema de transmissão de um sistema acoplado de equações de ondas foi estudado por Raposo [1] utilizando a mesma técnica apresentada neste minicurso.

Seja k_1, k_2 e α números reais positivos e $0 < L_0 < L$. O sistema considerado aqui é

$$\begin{aligned} u_{tt} - k_1 u_{xx} + \alpha u_t &= 0, \quad x \in (0, L_0),\ t > 0, && (6.1) \\ v_{tt} - k_2 v_{xx} &= 0, \quad x \in (L_0, L),\ t > 0, && (6.2) \end{aligned}$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$u(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{6.3}$$

condições de transmissão

$$u(L_0,t) = v(L_0,t), \quad k_1 u_x(L_0,t) = k_2 v_x(L_0,t), \quad t > 0, \tag{6.4}$$

e dados iniciais

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in (0, L_0), \\ v(x,0) &= v^0(x), \quad v_t(x,0) = v^1(x), \quad x \in (L_0, L). \end{aligned}\right. \tag{6.5}$$

Estaremos particularmente interessados em estudar o comportamento assintótico da solução do problema acima. Nosso principal resultado é o Teorema 6.2 onde provaremos que a solução de (6.1)-(6.5) decai exponencialmente a zero, independentemente do comprimento $L - L_0$. A idéia que utilizaremos consiste em obter adequados multiplicadores para cosntruir um funcional de Lyapunov para o sistema.

Denotamos o espaço

$$\mathcal{V} := \{(u,v) \in H^1(0,L_0) \times H^1(L_0,L) \,:\, u(0) = v(L) = 0,\ u(L_0) = v(L_0)\}$$

que dotado com o produto interno

$$\langle (u^1, v^1)\, ,\, (u^2, v^2) \rangle := \int_0^{L_0} u_x^1 u_x^2 \, dx + \int_0^{L_0} v_x^1 v_x^2 \, dx$$

é um espaço de Hilbert. As energias associadas as equações (6.1) e (6.2) são,

$$E_1(t) \;\; = \;\; \frac{1}{2} \int_0^{L_0} [|u_t|^2 + k_1 |u_x|^2] \, dx$$

e

$$E_2(t) \;\; = \;\; \frac{1}{2} \int_{L_0}^{L} [|v_t|^2 + k_2 |v_x|^2] \, dx$$

respctivamente. Denotaremos $E(t) = E_1(t) + E_2(t)$ a energia total associada ao sistema (6.1) - (6.5).

A seguir organizaremos o trabalho do seguinte modo: na Subseção 6.2 mostraremos a existência de solução fraca e forte para o sistema (6.1) - (6.5), e na Subseção 6.3 provaremos o decaimento exponencial.

6.2 Existencia de solução

Inicialmente vamos dizer o que entendemos por solução fraca para o problema de transmissão.

Definição 6.1 *O par $(u(x,t), v(x,t))$ é uma solução fraca para o sistema (6.1) - (6.5) quando*

$$(u, v) \in \; L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L)),$$

e satisfaz

$$\begin{aligned} -\int_0^{L_0} u^1 \phi(0)\, dx - \int_{L_0}^{L} v^1 \psi(0)\, dx - \int_0^T \int_0^{L_0} u_t \phi_t \, dx\, dt - \int_0^T \int_{L_0}^{L} v_t \psi_t \, dx\, dt & \\ + \; k_1 \int_0^T \int_0^{L_0} u_x \phi_x \, dx\, dt + k_2 \int_0^T \int_{L_0}^{L} v_x \psi_x \, dx\, dt + \alpha \int_0^T \int_0^{L_0} u_t \phi \, dx\, dt &\;\; = \;\; 0 \end{aligned}$$

para qualquer $(\phi, \psi) \in \; L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L))$ tal que $(\phi(T), \psi(T)) = (0, 0)$.

Teorema 6.1 *Seja $(u^0, v^0) \in \; (H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L)) \cap \mathcal{V}$ e $(u^1, v^1) \in \; \mathcal{V}$ verificando as condições de transmissão. Sob estas condições a solução (u, v) de (6.1) - (6.5) satisfaz*

$$(u, v) \in \bigcap_{k=0}^{2} W^{k,\infty}(0, T; H^{2-k}(0, L_0) \times H^{2-k}(L_0, L).$$

Prova.- Provaremos este resultado usando o método de Faedo-Galerkin. Neste sentido considere a base $\{(\phi^0,\psi^0),\ (\phi^1,\psi^1),\ (\phi^2,\psi^2),\cdots\}$ of $\mathcal{V}$ e seja

$$(u_m^0,v_m^0),(u_m^1,v_m^1)\in\ [(\phi^0,\psi^0),(\phi^1,\psi^1)\cdots\ (\phi^m,\psi^m)].$$

Resultados conhecidos de Equações Diferenciais Ordinárias garantem a existência e unicidade de solução

$$(u^m(t),v^m(t)):=\sum_{j=1}^m h_{j,m}(t)(\phi^j,\psi^j)$$

para o sistema aproximado,

$$\int_0^{L_0} u_{tt}\phi^i\,dx+\int_{L_0}^{L} v_{tt}\psi^i\,dx+k_1\int_0^{L_0} u_x\phi^i_x\,dx+k_2\int_{L_0}^{L} v_x\psi^i_x\,dx+\alpha\int_0^{L_0} u_t\phi^i\,dx=0 \tag{6.6}$$

$i\ =\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$, com dados iniciais

$$(u^m(0),v^m(0))=(u_m^0,v_m^0),\quad (u_t^m(0),v_t^m(0))=(u_m^1,v_m^1).$$

Iremos a seguir mostrar que a solução continua limitada para todo $m\in\mathbf{N}$. Para provar isto, primeiro multiplicamos a equação (6.6) por $h'_{j,m}(t)$ e somamos em i, para obter

$$\frac{d}{dt}E^m(t)=-\alpha\int_0^{L_0}|u_t^m|^2\,dx.$$

Integrando a identidade acima de 0 a t, temos

$$E^m(t)\le E^m(0)$$

mostrando que a energia de primeira ordem $E^m(t)$ é limitada para todo $m\in\mathbf{N}$.

Agora denotamos a energia de segunda ordem por

$$\mathcal{E}^m(t)=\frac{1}{2}\int_0^{L_0}[|u_{tt}^m|^2+k_1|u_{xt}^m|^2]\,dx+\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}[|v_{tt}^m|^2+k_2|v_{xt}^m|^2]\,dx.$$

Derivando a equação (6.6) na variável t, obtemos

$$\int_0^{L_0} u_{ttt}\phi^i\,dx+\int_{L_0}^{L} v_{ttt}\psi^i\,dx+k_1\int_0^{L_0} u_{xt}\phi^i_x\,dx+k_2\int_{L_0}^{L} v_{xt}\psi^i_x\,dx+\alpha\int_0^{L_0} u_{tt}\phi^i\,dx=0.$$

Multiplicando a equação acima por $h''_{j,m}(t)$ e somando em i, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}^m(t)=-\alpha\int_0^{L_0}|u_{tt}^m|^2\,dx$$

que após integrarmos de 0 to t resulta

$$\mathcal{E}^m(t)\le\mathcal{E}^m(0).$$

A próxima etapa é estimar a energia de segunda ordem. Fazendo $t \to 0^+$ na equação (6.6), e multiplicando o limite resultante por $h''_{j,m}(t)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{L_0} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx + \int_{L_0}^L |v_{tt}^m(0)|^2\,dx &= -k_1\int_0^{L_0} u_x^m(0)u_{xtt}^m(0)\,dx - k_2\int_{L_0}^L v_x^m(0)v_{xtt}^m(0)\,dx\\ &- \alpha\int_0^{L_0} u_t^m(0)u_{tt}^m(0)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes a equaçã acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{L_0} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx + \int_{L_0}^L |v_{tt}^m(0)|^2\,dx &= k_1\int_0^{L_0} u_{xx}^m(0)u_{tt}^m(0)\,dx + k_2\int_{L_0}^L v_{xx}^m(0)v_{tt}^m(0)\,dx\\ &- \alpha\int_0^{L_0} u_t^m(0)u_{tt}^m(0)\,dx. \qquad (6.7)\end{aligned}$$

Após aplicação da desigualdade de Young na equação (6.7) encontramos

$$\begin{aligned}\int_0^{L_0} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx + \int_{L_0}^L |v_{tt}^m(0)|^2\,dx &\le c\{\int_0^{L_0} |u_{xx}^m(0)|^2\,dx + \int_{L_0}^L |v_{xx}^m(0)|^2\,dx\}\\ &+ c\int_0^{L_0} |u_t^m(0)|^2\,dx.\end{aligned}$$

que implica que o dado inicial

$$(u_{tt}^m(0), v_{tt}^m(0)) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L)),$$

e portanto $\mathcal{E}^m(0)$ é limitada. Então temos

$$\mathcal{E}^m(t) \quad \text{é limitada para rodo } \ m\in\mathbf{N}.$$

A Energia de primeira e de segunda ordem sendo limitadas implica que existe uma subsequência de (u^m, v^m), a qual continuaremos denotando do mesmo modo, tal que

$$\begin{aligned}(u^m, v^m) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u,v) &&\text{em} && L^\infty(0.T;\mathcal{V}),\\ (u_t^m, v_t^m) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u_t,v_t) &&\text{em} && L^\infty(0.T;\mathcal{V}),\\ (u_{tt}^m, v_{tt}^m) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u_{tt},v_{tt}) &&\text{em} && L^\infty(0.T;L^2(0,L_0)\times L^2(L_0,L))).\end{aligned}$$

Nesta condição o par (u,v) atisfaz

$$\begin{aligned}u_{tt} - k_1u_{xx} + \alpha u_t &= 0\\ v_{tt} - k_2v_{xx} &= 0.\end{aligned}$$

Seguindo as mesmas idéias da seção 4 podemos facilmente concluir o restante da demonstração.

6.3 Estabilidade exponencial

A seguir iremos provar alguns lemas técnicos que serão fundamentais para obtermos a prova do nosso principal resultado, o Teorema 6.2.

Lema 6.1 *A energia total $E(t)$ satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \int_0^{L_O} |u_t|^2 \, dx.$$

Prova.- Multiplicando a equação (6.1) por u_t e fazendo a integração em $(0, L_0)$ obtemos

$$\int_0^{L_0} u_t u_{tt} \, dx - k_1 \int_0^{L_0} u_t u_{xx} \, dx = -\alpha \int_0^{L_0} |u_t|^2 \, dx$$

que após integração por partes resulta em

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^{L_0} [|u_t|^2 + k_1|u_x|^2] \, dx = -\alpha \int_0^{L_0} |u_t|^2 \, dx + k_1 u_x(L_0)u_t(L_0). \tag{6.8}$$

Multiplicando a equação (6.2) por v_t e fazendo a integração em (L_0, L) obtemos

$$\int_{L_0}^{L} v_t v_{tt} \, dx - k_2 \int_{L_0}^{L} v_t v_{xx} \, dx = 0.$$

Após integração por partes obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L} [|v_t|^2 + k_2|v_x|^2] \, dx = -k_2 v_x(L_0)v_t(L_0). \tag{6.9}$$

Somando (6.8) com (6.9) e utilizando as condições de transmissão (6.4) podemos concluir que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \int_0^{L_O} |u_t|^2 \, dx. \tag{6.10}$$

Lema 6.2 *Existem constantes posditivas C_0 e C_1 independentes dos dados iniciais, tal que, o funcional definido por*

$$J_1(t) = \int_0^{L_O} (x - L_0)u_t u_x \, dx$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}J_1(t) \leq -C_1 E_1(t) + C_0 \int_0^{L_O} |u_t|^2 \, dx + \frac{k_1 L_0}{2}|u_x(0)|^2.$$

Prova.- Multiplicando a equação (6.1) by $(x-L_0)u_x$ e fazendo a integração em $(0,L_0)$ obtemos

$$\int_0^{L_0}(x-L_0)u_xu_{tt}\,dx - k_1\int_0^{L_0}(x-L_0)u_xu_{xx}\,dx = -\alpha\int_0^{L_0}(x-L_0)u_xu_t\,dx. \qquad (6.11)$$

Note que

$$\frac{d}{dt}(x-L_0)u_xu_t = (x-L_0)u_xu_{tt} + (x-L_0)u_{xt}u_t. \qquad (6.12)$$

Agora usando (6.12) in (6.11) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0}(x-L_0)u_xu_t\,dx &= \int_0^{L_0}(x-L_0)\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|u_t|^2]\,dx \\ &+ k_1\int_0^{L_0}(x-L_0)\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|u_x|^2]\,dx \\ &- \alpha\int_0^{L_0}(x-L_0)u_xu_t\,dx\end{aligned}$$

e fazendo integração por partes temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0}(x-L_0)u_xu_t\,dx. &= -\frac{1}{2}\int_0^{L_0}|u_t|^2\,dx - \frac{k_1}{2}\int_0^{L_0}|u_x|^2\,dx \\ &- \alpha\int_0^{L_0}(x-L_0)u_xu_t\,dx + \frac{k_1L_0}{2}|u_x(0)|^2\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dt}J_1(t) \le -C_1E_1(t) + C_0\int_0^{L_O}|u_t|^2\,dx + \frac{k_1L_0}{2}|u_x(0)|^2.$$

Lema 6.3 *Existe uma constante positiva C_2, independente dos dados iniciais, tal que, o funcional definido por*

$$J_2(t) = \int_{L_0}^{L}(x-L_0)v_tv_x\,dx$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}J_2(t) \le -C_2E_2(t) + \frac{k_2(L-L_0)}{2}|v_x(L)|^2.$$

Prova.- Multiplicando a equação (6.2) por $(x-L_0)v_x$ e fazendo a integração em (L_0,L) obtemos

$$\int_{L_0}^{L}(x-L_0)v_xv_{tt}\,dx - k_2\int_{L_0}^{L}(x-L_0)v_xv_{xx}\,dx = 0. \qquad (6.13)$$

Note que

$$\frac{d}{dt}(x-L_0)v_xv_t = (x-L_0)v_xv_{tt} + (x-L_0)v_{xt}v_t. \tag{6.14}$$

Agora usando (6.14) in (6.13) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}(x-L_0)v_xv_t\,dx &= \int_{L_0}^{L}(x-L_0)\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|v_t|^2]\,dx \\ &+ k_2\int_{L_0}^{L}(x-L_0)\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|v_x|^2]\,dx\end{aligned}$$

e fazendo integração por partes temos

$$\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L}(x-L_0)v_xv_t\,dx. = -\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}|v_t|^2\,dx - \frac{k_2}{2}\int_{L_0}^{L}|v_x|^2\,dx + \frac{k_2(L-L_0)}{2}|v_x(L)|^2$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dt}J_2(t) \le -C_2E_2(t) + \frac{k_2(L-L_0)}{2}|v_x(L)|^2.$$

Agora precisamos controlar os termos pontuais $|u_x(0)|^2$ e $|v_x(L)|^2$ que apareceram nos Lemas 6.2 e 6.3 respectivamente. Para isto introduzimos os seguintes lemas

Lema 6.4 *Seja $p \in C^1(0,L_0)$ com $p(0) > 0$ e $p(L_0) = 0$. Então, existem constantes positivas C_0, C_4, N_0 independentes dos dados iniciais, tal que, o funcional definido por*

$$J_3(t) = N_0J_1(t) + \int_0^{L_0} pu_tu_x\,dx$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}J_3(t) \le -C_4E_1(t) + N_0C_0\int_0^{L_0}|u_t|^2\,dx.$$

Prova.- Multiplicando a equação (6.1) por $p\,u_x$ e fazendo a integração em $(0,L_0)$ obtemos

$$\int_0^{L_0} p\,u_xu_{tt}\,dx - k_1\int_0^{L_0} p\,u_xu_{xx}\,dx = -\alpha\int_0^{L_0} p\,u_xu_t\,dx. \tag{6.15}$$

Note que

$$\frac{d}{dt}p\,u_xu_t = p\,u_xu_{tt} + p\,u_{xt}u_t. \tag{6.16}$$

Agora usando (6.16) em (6.15) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0} p\,u_xu_t\,dx &= \int_0^{L_0} p\,\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|u_t|^2]\,dx \\ &+ k_1\int_0^{L_0} p\,\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|u_x|^2]\,dx \\ &- \alpha\int_0^{L_0} p\,u_xu_t\,dx\end{aligned}$$

e fazendo integração por partes temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0} p\, u_x u_t\, dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{L_0} p'\, |u_t|^2\, dx \\ &- \frac{k_1}{2} p(0)\, |u_x(0)|^2 - \frac{k_1}{2}\int_0^{L_0} p'\, |u_x|^2\, dx \\ &- \alpha \int_0^{L_0} p\, u_x u_t\, dx,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dt}\int_0^{L_0} p\, u_x u_t\, dx \leq -\frac{k_1}{2} p(0)\, |u_x(0)|^2 + C_3 E_1(t).$$

Denotando

$$J_3(t) = N_0 J_1(t) + \int_0^{L_0} p u_t u_x\, dx,$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} J_3(t) &\leq -N_0 C_1\, E_1(t) + C_3\, E_1(t) \\ &+ \frac{N_0 k_1 L_0}{2}\, |u_x(0)|^2 - \frac{k_1}{2} p(0)\, |u_x(0)|^2 \\ &+ N_0\, C_0 \int_0^{L_0} |u_t|^2\, dx.\end{aligned}$$

Agora tomando N_0 tal que $N_0\, C_1 > C_3$ e escolhendo $p(0) = N_0 L_0$ podemos concluir

$$\frac{d}{dt} J_3(t) \leq -C_4 E_1(t) + N_0 C_0 \int_0^{L_0} |u_t|^2\, dx.$$

Lema 6.5 *Seja $q \in C^1(L_0, L)$ com $q(L_0) = 0$ e $q(L) < 0$. Então, existem constantes positivas C_5 e N_1 independentes dos dados iniciais tal que o funcional definido por*

$$J_4(t) = N_1 J_2(t) + \int_{L_0}^{L} q v_t v_x\, dx$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} J_4(t) \leq -C_5 E_2(t).$$

Prova.- Multiplicando a equação (6.2) por $q\, v_x$ e fazendo integração em (L_0, L) obtemos

$$\int_{L_0}^{L} q\, v_x v_{tt}\, dx - k_2 \int_{L_0}^{L} q\, v_x v_{xx}\, dx = 0. \tag{6.17}$$

Note que

$$\frac{d}{dt}q\,v_x v_t = q\,v_x v_{tt} + q\,v_{xt} v_t. \tag{6.18}$$

Agora usando (6.18) em (6.17) temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} q\,v_x v_t\,dx &= \int_{L_0}^{L} q\,\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|v_t|^2]\,dx \\ &+ k_2\int_{L_0}^{L} q\,\frac{1}{2}[\frac{d}{dx}|v_x|^2]\,dx\end{aligned}$$

e fazendo integração por partes temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} q\,v_x v_t\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L} q'\,|v_t|^2\,dx \\ &+ \frac{k_2}{2}q(L)\,|v_x(L)|^2 - \frac{k_2}{2}\int_{L_0}^{L} q'\,|v_x|^2\,dx,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} q\,v_x v_t\,dx \le \frac{k_2}{2}q(L)\,|v_x(L)|^2 + C_4 E_2(t).$$

Denotando

$$J_4(t) = N_1 J_2(t) + \int_{L_0}^{L} q v_t v_x\,dx,$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_4(t) &\le -N_1 C_2\,E_2(t) + C_4\,E_2(t) \\ &+ \frac{N_1 k_2(L-L_0)}{2}\,|v_x(L)|^2 + \frac{k_2}{2}q(L)\,|v_x(L)|^2.\end{aligned}$$

Agora tomando N_1 tal que $N_1\,C_2 > C_4$ e escolhendo $q(L) = -N_1(L-L_0)$ concluimos que

$$\frac{d}{dt}J_4(t) \le -C_5 E_2(t).$$

Agora estamos em condições de mostrar o principal resultado deste minicurso.

Teorema 6.2 *Vamos denotar por (u, v) a solução forte do sistema $(6.1)-(6.5)$. Então existem constantes positivas C e ω, tal que*

$$E(t) \le C\,E(0)e^{-\omega\,t}.$$

Prova.- Definimos

$$\mathcal{L}(t) = N_2\, E(t) + J_3(t) + J_4(t).$$

Do lema 6.1 temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \int_0^{L_O} |u_t|^2\, dx.$$

Do lema 6.4 temos

$$\frac{d}{dt}J_3(t) \leq -C_4 E_1(t) + N_0 C_0 \int_0^{L_0} |u_t|^2\, dx.$$

Do lema 6.5 temos

$$\frac{d}{dt}J_4(t) \leq -C_5 E_2(t).$$

De fato temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_4 E_1(t) - C_5 E_2(t) + (N_0 C_0 - N_2 \alpha) \int_0^{L_0} |u_t|^2\, dx.$$

Tomando N_2 suficientemente grande segue que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_6\, E(t)$$

Observando que $\mathcal{L}(t)$ é equivalente a $E(t)$, podemos concluir que existem constantes positivas C e ω, tal que

$$E(t) \leq C\, E(0) e^{-\omega\, t}.$$

O Teorema 6.2 pode ser extendido facilmente para soluções fracas usando argumentos de densidade e a lei da semicontinuidade fraca do funcional de energia $E(t)$. Neste sentido temos o seguinte corolário cuja demonstração é análoga a feita na seção 5.

Corolário 6.1 *Sob as mesmas hipótese do teorema 6.2. Existe constantes positivas $\bar{C}$ e $\bar{\omega}$, tal que*

$$E(t) \leq \bar{C}\, E(0) e^{-\bar{\omega}\, t}.$$

Referências

[1] C. A. Raposo. *The transmission problem for Timoshenko's system of memory type.* Int. J. Mod. Math., 3, 271-293, (2008).

[2] E. Zuazua, *Stability and Decay for a Class of Nonlinear Hyperbolic Problems.* Asymptotical Analysis, 1, 161-185, (1988).

[3] J. L. Lions, *Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués.* Collection RMA - Tomo 1, Masson , Paris (1998).

[4] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York (1975).

[5] C. A. Raposo and W. D. Bastos. *Transmission problem for waves with frictional damping.* Eletronic Journal of Differential Equation, 2007, 1-10, (2007).

[6] C. A. Raposo, W. D. Bastos, M. L. Santos. *A Transmission Problem for Timoshenko System.* Computational & Applied Mathematics, 26, p. 215-234, (2007).

[7] C. A. Raposo, W. D.Bastos, J. A. J. Ávila. *A Transmission Problem for Euler-Bernoulli beam with Kelvin-Voigt Damping.* Applied Mathematics & Information Sciences. 5, 17-28, (2011).

[8] J. E. M. Rivera and H. P. Oquendo; *The transmission Problem of Viscoelastic Waves.* Acta Applicandae Mathematicae, 60, 1, 1-21 (2000).

[9] C. A. Raposo. *General Decay of Solution for the Transmission Problem of Viscoelastic Waves with Memory.* Advances in Differential Equations and Control Processes, 3, 103-114, (2009).

[10] J. E. M. Rivera, M. Alves, M. Sepulveda and O. Vera. *The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity.* Mathematische Nachrichten, 287, 5-6, 483-497, (2013).

Carlos Alberto Raposo da Cunha

Depto. de Matemática e Estatística
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei
Praça Frei Orlando 170, Cep 36307-352, São João del-Rei, MG.
email: raposo@ufsj.edu.br